Hak Cipta Modul Pembelajaran

by Dewiyani Sunarto

MODUL PEMBELAJARAN INOVATIF
SCIENTIFIC HYBRID LEARNING

MATAKULIAH
MATEMATIKA BISNIS

PENYUSUN :
DEWIYANI SUNARTO

MODUL PEMBELAJARAN INOVATIF
SCIENTIFIC HYBRID LEARNING
MATAKULIAH MATEMATIKA BISNIS

Ketua Pengarah : Dr. Bambang Hariadi, M.Pd.
Penyusun : Dr. M.J. Dewiyani Sunarto
Editor : Prof. Dr. Budi Jatmiko, M.Pd.
Dr. Binar Kurnia Prahani
Tata Letak Isi : Wawan W. Efendi
Desain Sampul : Tri Sagirani, S.Kom., M.MT.

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, berkat anugerah kesehatan dan kekuatan akal budi, sehingga kami dapat menyelesaikan Buku Modul Pembelajaran Inovatif Model *Scientific Hybrid Learning* Matematika Bisnis.

Buku ini berisi penerapan materi Matriks, Invers Matriks dan Sistem Persamaan Linear dalam dunia bisnis, yang merupakan bagian dari materi Matematika Bisnis.

Kekhususan dari buku ini dibanding dengan buku lain adalah karena buku ini didasarkan pada model pembelajaran *Scientific Hybrid Learning,* yang dibangun berdasar sintaks, dengan 5 fase, yaitu (1) Orientasi berbasis IoTs dan *Big Data,* (2) Investigasi, (3) Menganalisis, (4) Mempresentasikan, dan (5) Mengevaluasi. Sedang literasi yang digunakan terdiri dari (1) Literasi Data, (2) Literasi Informasi, dan (3) Literasi Sumber Daya Manusia.

Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saan untuk perbaikan buku ini di masa yang akan datang. Akhir kata, penulis mengicapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan, penyusunan, hingga penerbitan buku ini.

Surabaya, Nopember 2018

M.J. Dewiyani Sunarto

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iii
DAFTAR ISI v
PETA ANALISIS INSTRUKSIONAL vii

MODUL MATRIKS 9
Pengantar 10
A. Kompetensi Umum 12
B. Kompetensi Khusus 12
C. Indikator 13
D. Uraian Materi 14
1. Pengertian Matriks 14
2. Jenis-Jenis Matriks 16
3. Kesamaan Matriks 20
4. Operasi Matriks 21
5. Sifat-sifat Operasi Matriks 27
6. Menentukan Operasi Matriks dengan Aplikasi Pengolahan Angka (MS Excel) 29
Latihan 41
Tes Formatif 45

MODUL DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS
Pengantar 54
A. Kompetensi Umum 56

B. Kompetensi Khusus 56
C. Indikator 57
D. Uraian Materi 58
1. Determinan Matriks 58
2. Invers Matriks 69
3. Menentukan Determinan dan Matriks dengan MS Excel 75
Latihan 79
Tes Formatif 80

MODUL SISTEM PERSAMAAN LINEAR
Pengantar 86
E. Kompetensi Umum 88
F. Kompetensi Khusus 88
G. Indikator 89
H. Uraian Materi 90
1. Pengertian 90
2. Jenis-jenis Sistem Persamaan Linear 91
3. Jenis-jenis Penyelesaian Sistem Persamaan Linear 91
4. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan 2 Persamaan dan 2 Vareabel 93
5. Menyelesaikan SPL dengan n Persamaan dan n vareabel dengan Menggunakan Metoda Matriks 95
6. Menyelesaikan SPL degan n Persamaan dan v Vareabel dengan Menggunakan Aturan Cramer 97
7. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan MS Excel 101
Tes Formatif 126

PETA ANALISIS INSTRUKSIONAL

MENGETAHUI OPERASI HITUNG DASAR

(1,2) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan sifat bilangan real melalui analisis dan penggunaan informasi di dunia digital serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

(3,4) Mahasiswa mampu **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan sifat pecahan, desimal dan persen melalui aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

(5,6) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan **menggunakan** persamaan dan pertidaksamaan linear melalui sumber belajar di Internet, aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian

(8,9) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan matriks melalui bantuan aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian

(10) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear melalui bantuan Matlab, aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian (C3, A5, P5)

(11) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan Eksponen dan Logaritma melalui bantuan Matlab, aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian

(12,13) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep matematika melalui bantuan Matlab, aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

MODUL

MATRIKS

PENGANTAR

Konsep matriks yang telah dikenal sejak Sekolah Menengah Pertama, ternyata mempunyai peran penting dalam proses bisnis operasional, diantaranya adalah pada Analisis Masukan dan Keluaran (Analisis Input Output). Tujuan dari Analisis Masukan dan Keluaran adalah untuk menentukan berapa banyak tingkat output dari setiap industri yang harus diproduksi dalam suatu perekonomian, agar supaya dapat memenuhi total permintaan terhadap produk secara pasti. Agar dapat menyelesaikan Analisis Input Output ini dengan baik, maka Anda harus dapat membuat matriks dari permasalahan yang disajikan, kemudian melakukan operasi matriks serta menentukan invers matriksnya, agar didapatkan total permintaan terhadap produk tersebut.

Pada modul ini, Anda akan mempelajari langkah demi langkah dari keseluruhan proses yang diperlukan, mulai dari perhitungan tanpa aplikasi/bantuan perangkat lunak apapun, dengan tujuan agar Anda memahami dengan baik konsepnya, dan dilanjut dengan menggunakan perangkat lunak pengolah angka, untuk soal yang sudah lebih kompleks.

Setelah mempelajari modul 1 ini, Anda diharapkan dapat menyelesaikan soal-soal latihan, tugas dan tes formatif yang ada pada modul ini.

Agar Anda dapat mengikuti dengan baik seluruh proses perkuliahan ini, maka mahasiswa harus siapkan hal-hal berikut ini :

a. Komputer / laptop / handphone yang terhubung dengan Internet.
b. Telah bergabung dalam kelas Matematika Bisnis dalam aplikasi Brilian.
c. Mempunyai aplikasi pengolah angka dalam komputer/laptop Anda.
d. Install MatLab.
e. Install *reader QR Code.*
f. Buku elektronik wajib yang dimiliki :

(i) (ii) (iii)

g. Video Pembelajaran yang wajib dicermati :

dan video lain dari Khan Academy

A KOMPETENSI UMUM

Setelah menyelesaikan seluruh materi pada Matematika Bisnis, mahasiswa mampu menyelesaikan masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan kajian matematis melalui analisis dan penggunaan informasi di dunia digital serta menggunakan aplikasi/rekayasa perangkat lunak.

B KOMPETENSI KHUSUS

Setelah menyelesaikan modul 1 ini, mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan matriks baik tanpa maupun menggunakan bantuan aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

C INDIKATOR

Setelah menyelesaikan pertemuan pada modul ini, maka diharapkan mahasiswa dapat :

1. Menyebutkan pengertian matriks dari contoh-contoh yang didapat melalui berbagai sumber data dan informasi melalui jaringan internet (Penguasaan Literasi Data).
2. Menggolongkan jenis matriks dari beberapa matriks yang telah diberikan, dengan menggunakan kemampuan *complex problem solving, social skill, process skill, dan system skill* (Penguasaan Literasi Manusia).
3. Mengoperasikan matriks dengan aturan pengoperasian yang didapat dari berbagai sumber yang menyajikan pengoperasian matriks, seperti Khan Academy dan lain lain (Penguasaan Literasi Teknologi).
4. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional dengan menggunakan matriks melalui kemampuan *complex problem solving* tanpa bantuan aplikasi (Penguasaan Literasi Manusia).
5. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional yang lebih kompleks dengan menggunakan matriks melalui kemampuan *complex problem solving* dengan bantuan aplikasi pengolah angka sederahana (Penguasaan Literasi Manusia dan Literasi Teknologi).

D URAIAN MATERI

1 PENGERTIAN MATRIKS

Matriks adalah kumpulan angka-angka (elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom, dan berbentuk empat persegi panjang. Elemen-elemennya ditunjukkan pada baris dan kolomnya.

Nama suatu matriks dinyatakan dengan huruf besar, misalnya A, B, C, ...

Jika elemennya berupa huruf, elemen tersebut biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya a,b,c...

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang terdapat di dalam segi empat tersebut. Ukuran matriks sering disebut Ordo Matriks. Ordo matriks A yang mempunyai m baris dan n kolom, dinyatakan dengan A mxn.

Bentuk Umum :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A adalah matriks berukuran m x n, yang berarti matriks tersebut mempunyai jumlah baris sebanyak m, dan jumlah kolom sebanyak n.

Elemen dari suatu matriks dinyatakan dengan alamat nya, misalnya : a_{11} berarti elemen di baris ke 1, dan kolom ke 1, a_{mn} berarti elemen di baris ke m dan kolom ke n.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 3 x 2, karena mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sedang matriks B berorodo 1 x 4, karena mempunyai 1 baris dan 4 kolom.

Elemen baris ke 3 dan kolom ke 2 dari matriks A, adalah elemen 4, atau dapat ditulis $a_{32} = 4$, sedang elemen baris ke 1 dan kolom ke 3 dari matriks B adalah elemen 9, atau dapat ditulis $b_{13} = 9$.

2

JENIS-JENIS MATRIKS

Terdapat beberapa jenis matriks, pada buku ini, akan dibahas jenis matriks yang akan digunakan dalam perhitungan di dunia bisnis.

a. Matriks Baris

Adalah matriks dengan banyaknya baris 1.

Contoh :

A_{1x4} = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks baris, dengan jumlah kolomnya 4.

b. Matriks Kolom

Adalah matriks dengan banyaknya kolom 1.

Contoh :

B_{3x1} = $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, adalah matriks kolom, dengan jumlah barisnya 3.

c. Matriks Bujur Sangkar

Adalah matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh :

$C_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar, karena banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom yaitu 3.

d. Matriks Diagonal

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya ≠ 0, dan elemen selain diagonal utamanya = 0.

Elemen pada diagonal utama ialah elemen yang beralamat : a11, a22, a33, ..., ann.

Contoh :

$D_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, adalah matriks diagonal dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu $d_{11} \neq 0$, $d_{22} \neq 0$, $d_{33} \neq 0$, sedangkan elemen yang lain = 0.

e. Matriks Skalar

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya ≠ 0 dan semua elemen pada diagonal utama itu sama, sedangkan elemen elemen lain = 0.

Contoh :

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$ adalah matriks diagonal dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu $e_{11} = e_{22} = e_{33} = -2$, sedang elemen lain = 0.

Matriks skalar dapat juga didefinisikan, sebagai matriks diagonal, dengan elemen pada diagonal utamanya semua sama.

f. Matriks Identitas

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya = 1, sedangkan elemen elemen lain = 0. Matriks Identitas, selalu diberi nama dengan I.

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$ adalah matriks identitas dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu $i_{11} = i_{22} = i_{33} = 1$, sedang elemen lain = 0.

Matriks Identitas dapat juga didefinisikan sebagai matriks skalar , dimana elemen pada diagonal utamanya = 1.

g. Matriks Segitiga Atas.

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen fij = 0, untuk i > j

Contoh :

$F = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, adalah matriks segitiga atas, karena elemen $f_{21}=f_{31}=f_{32}=0$.

h. Matriks Segitiga Bawah

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen gij = 0, untuk i < j

Contoh :

$G = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, adalah matriks segitiga bawah, karena elemen $g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$.

i. Matriks Nol

Adalah matriks dimana semua elemennya nol.

Contoh :

$$H_{2x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Matriks Transpose

Adalah matriks yang didapat dari matriks lain dengan cara menukar baris ke i menjadi kolom ke i, dan sebaliknya menukar baris ke j menjadi kolom ke j.

Untuk matriks Jmxn, maka matriks transpose : J^T_{mxn}

Contoh :

$$J_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \text{ maka } J^T_{3x2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

3

KESAMAAN MATRIKS

Dua buah matriks dikatakan sama jika :

- ordo sama
- elemen seletak sama

Elemen seletak dari dua buah matriks artinya elemen yang mempunyai alamat sama dari dua matriks tersebut.

Contoh :

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{2} \\ 5 & 7 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, B_{3x2} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{10}{2} & 7 \\ -3 & \frac{18}{2} \end{bmatrix}, C_{2x2} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{10}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks A = B , karena :

- ordo matriks A = ordo matriks B.
- elemen seletak sama : $a_{11}=b_{11}=-2$

$a_{12}=b_{12}=\frac{4}{2}=2$

$a_{21}=b_{21}=5=\frac{10}{2}$

$a_{22}=b_{22}=7$

$a_{31}=b_{31}=-3$

$a_{32}=b_{32}=9=\frac{18}{2}$

Matriks A $\neq$ C , karena :

- ordo matriks A $\neq$ ordo matriks C.
- karena ordo matriks tidak sama, maka elemen elemennya pasti juga tidak sama, jadi tidak perlu diselidiki.

4 OPERASI MATRIKS

Secara umum, operasi matriks adalah suatu usaha untuk mendapatkan matriks baru, dari 2 atau lebih matriks yang ada.

Jenis-jenis operasi matriks :

a. Penjumlahan/pengurangan dua matriks

Syarat : ordo kedua matriks sama

Cara : menjumlahkan/mengurangkan elemen yang seletak.

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan :

i. A + B

ii. A + C

iii. A – C

Jawab :

A + B = $\begin{bmatrix} 5+2 & -6+(-5) & 3+2 \\ 2+4 & 4+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -11 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

A + C = tidak dapat dijumlahkan, karena ordo tidak sama.

A - C = $\begin{bmatrix} 5-2 & -6-(-5) & 3-2 \\ 2-4 & 4-3 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

b. Perkalian skalar dengan matriks.

Syarat : -

Cara : mengalikan skalar tersebut, dengan setiap elemen yang ada.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$, maka tentukan matriks -3A

Jawab :

$$-3A = -3\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.-6 & -3.3 \\ -3.2 & -3.4 & -3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 18 & -9 \\ -6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian dua matriks.

Syarat : Banyaknya kolom matriks pada matriks kiri harus sama dengan banyaknya baris matriks kanan.

Cara : Mengalikan setiap baris dengan kolom kemudian menjumlahkan.

Notasi : A mxp B pxn = C mxn

Contoh :

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ B_{3x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},\ C_{1x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan : i. A x B

ii. B x C

iii. A X C

Jawab :

i. A_{2x3} x B_{3x1} = D_{2x1}

D = $\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}$, di mana :

d_{11} = mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks A, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks B, kemudian menjumlahkannya, sehingga d_{11} = 5.1 + 8.5 + (-9).2 = 27.

d_{21} = mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks A, dengan setiap elemen kolom ke 1 dari matriks B, kemudian menjumlahkannya, sehinga d_{21} = 2.1 + 1.5 + 5. 2 = 17.

Sehingga D_{2X1} = $\begin{bmatrix} 27 \\ 17 \end{bmatrix}$

ii. B_{3x1}xC_{1x4} = E_{3x4}

E_{3x4} = $\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \end{bmatrix}$, di mana :

e_{11}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga e_{11} = 1.2 = 2.

e_{12}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{12} = 1.0 = 0$.

e_{13}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{13} = 1.3 = 3$.

e_{14}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{14} = 1.1 = 1$.

e_{21}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{21} = 5.2 = 10$.

e_{22}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{22} = 5.0 = 0$.

e_{23}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{23} = 5.3 = 15$.

e_{24}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{24} = 5.1 = 5$.

e_{31}= mengalikan setiap elemen baris ke 3dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{31} = 2.2 = 4$.

e_{32}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{32} = 2.0 = 0$.

e_{33}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{33} = 2.\ 3 = 6$.

e_{34}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{34} = 2.1 = 2$.

Sehingga $E_{3x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 15 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

iii. A_{2x3} x C_{1x4} , karena banyaknya kolom matriks A adalah 3, sedang banyaknya baris matriks C adalah 1, maka matriks A dan C tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris matriks C.

Mengingat syarat perkalian dua matriks, maka dapat disimpulkan bahwa A x B ≠ B x A, karena syaratnya belum tentu dapat dipenuhi. Misalnya A_{2x3} x B_{3x1}, mungkin dilakukan, akan tetapi B_{3x1} x A_{2x3}, tidak dapat dilakukan, karena banyaknya kolom matriks B ≠ banyaknya baris matriks A.

5 SIFAT-SIFAT OPERASI MATRIKS

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka sifat operasi matriks adalah :

a. A+B= B+A (hukum komutatif penjumlahan)
b. A x B ≠ B x A (tidak berlaku hukum komutatif perkalian)
c. A + (B+C) = (A + B) + C (hukum assosiatif penjumlahan).
d. A(BC) = (AB)C (hukum assosiatif perkalian).
e. A(B+C) = AB + AC (hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan).
f. a(B+C) = aB + aC, dimana a adalah skalar.
g. a(bC) =(ab) C, dimana a dan b adalah skalar.
h. a(BC) = (aB) C =B(aC), di mana a adalah skalar.

6 MENENTUKAN OPERASI MATRIKS DENGAN APLIKASI PENGOLAHAN ANGKA (MS EXCEL)

Setelah kita mengetahui tentang Operasi Matriks tanpa aplikasi (secara manual), maka kita akan mencoba untuk menggunakan alat bantu untuk menentukannya. Terdapat beberapa alat bantu yang dapat digunakan untuk menentukan penjumlahan, pengurangan, perkalian matriks dengan skalar, perkalian dua matriks diantaranya adalah dengan MatLab, atau dengan MS Excel. Namun, pada buku ini akan dibahas dengan MS Excel, yaitu *software* yang cukup sederhana, karena telah umum digunakan.

A. Menentukan Penjumlahan dan Pengurangan Matriks dengan MS Excel

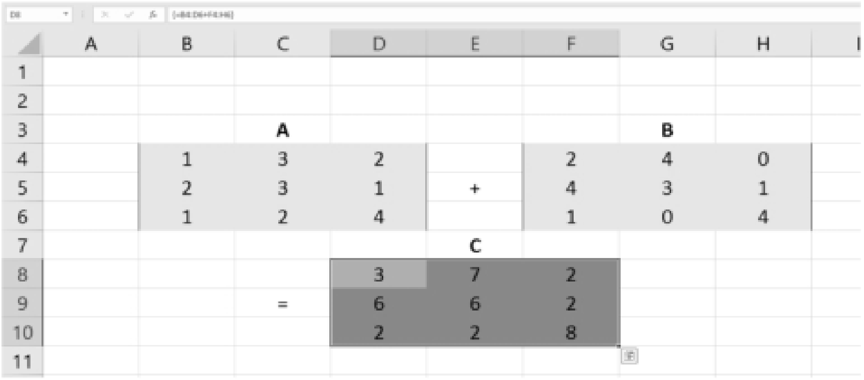
Contoh 1 :

Jumlahkan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Perhatikan langkah demi langkah :

1. Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B4:D6 dan matriks B ditulis di F4:H6).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil penjumlahan (misal ditulis di D8:F10).
3. Kemudian masukan rumus berikut "=B4:D6+F4:H6" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan memblok *range* yang akan dijumlahkan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range D8:F10, seperti tampak pada gambar di bawah ini :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3			A				B	
4		1	3	2		2	4	0
5		2	3	1	+	4	3	1
6		1	2	4		1	0	4
7					C			
8				3	7	2		
9			=	6	6	2		
10				2	2	8		
11								

4. Ini berarti hasil dari penjumlahan matriks A dan B adalah matriks C = $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

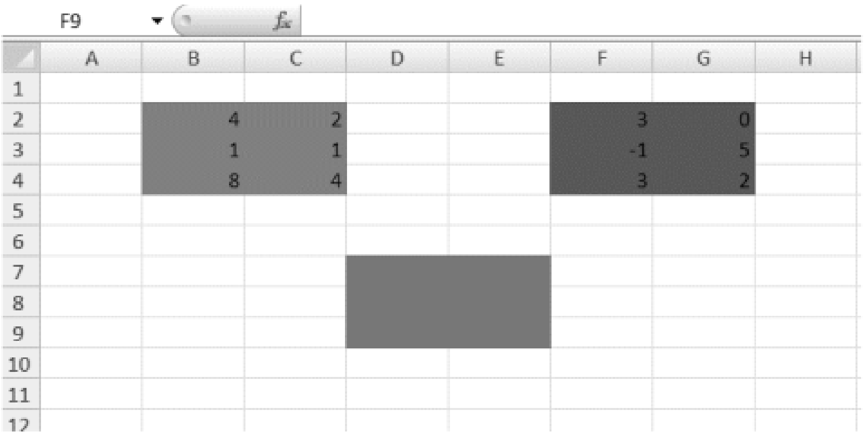
Contoh 2 :

Kurangkan matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel..

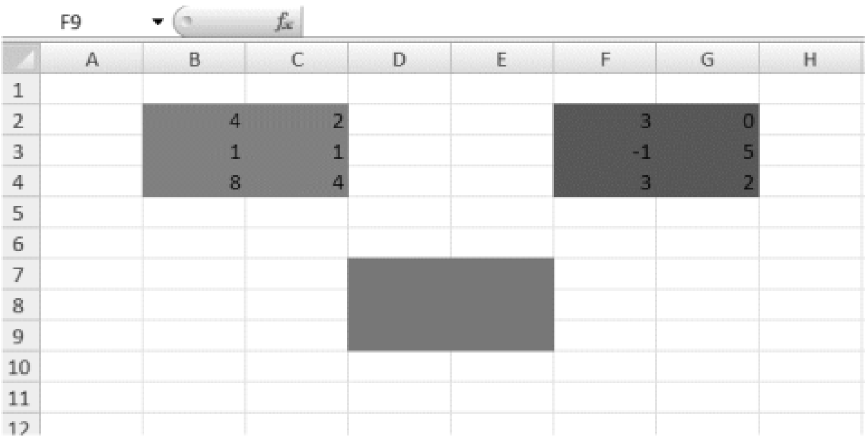
Jawab :

Perhatikan langkah demi langkah :

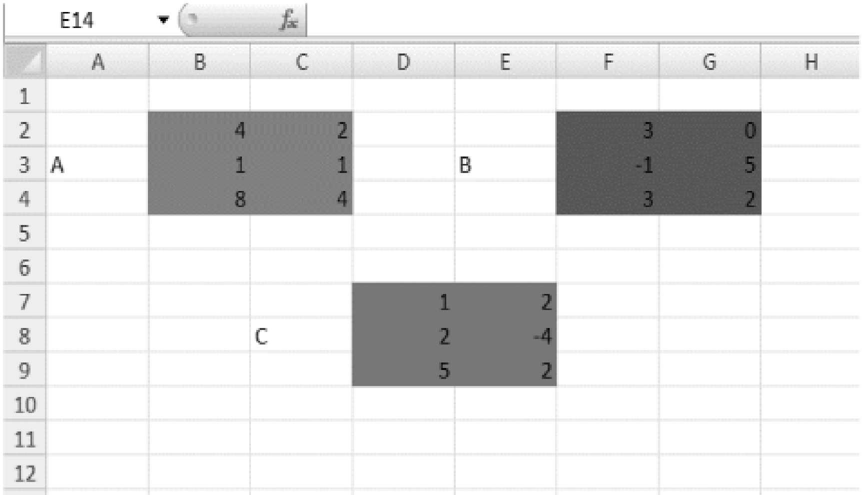
1. Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:C4 dan matriks B ditulis di F2:G4).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil pengurangan (misal ditulis di D7:E9).



3. Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Kemudian masukan rumus berikut "=B2:C4-F2:G4" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan memblok *range* yang akan dijumlahkan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range D7:E9, seperti tampak pada gambar di bawah ini :


E14

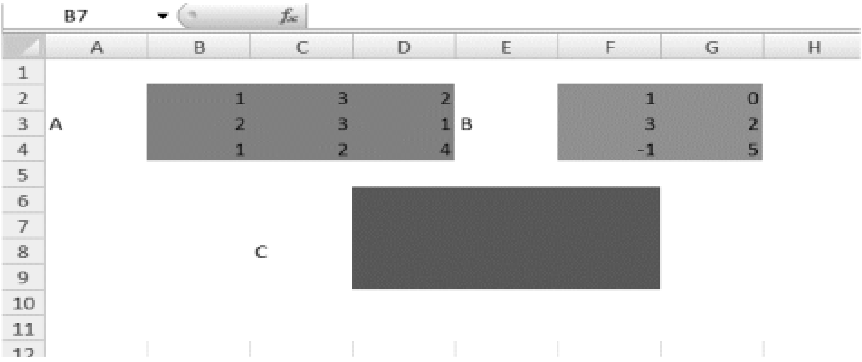
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		4	2			3	0	
3	A	1	1		B	-1	5	
4		8	4			3	2	
5								
6								
7				1	2			
8			C	2	-4			
9				5	2			
10								
11								
12								

Contoh 3 :

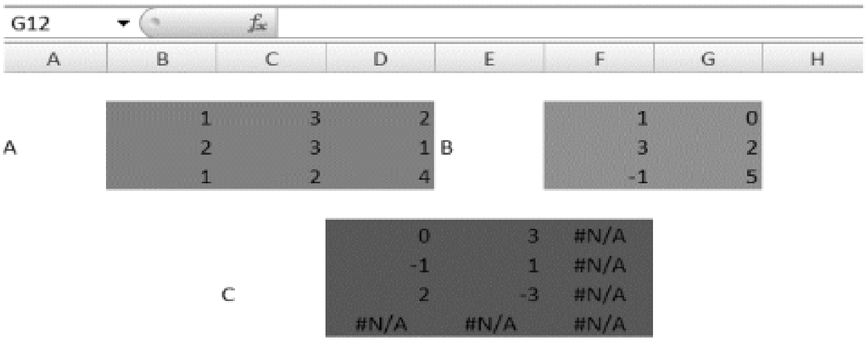
Jumlahkan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

1. Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4 dan matriks B ditulis di F2:G4).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil penjumlahan (misal ditulis di D6:F9).
3. Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Setelah dilakukan langkah seperti pada contoh 1 dan contoh 2, maka akan nampak hasil :



Hasil di atas terjadi karena antara matriks A dan matriks B tidak mempunyai ordo yang sama.

B. Menentukan Perkalian Antara Skalar dengan Matriks

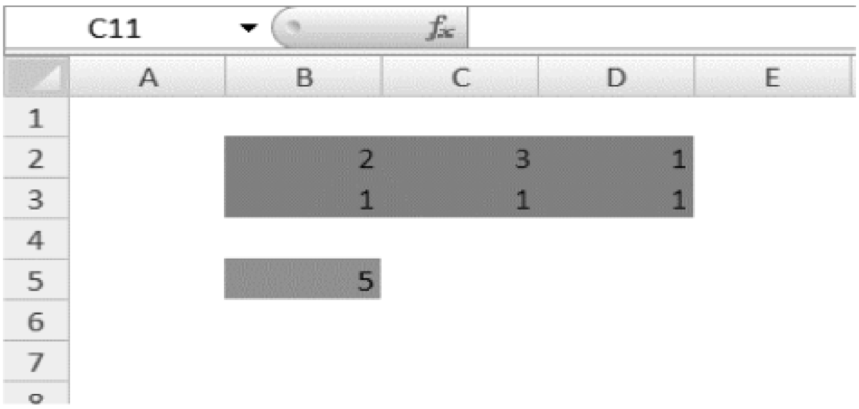
Untuk menentukan perkalian antara skalar dengan matriks, maka langkah yang ditempuh hampir sama dengan pada waktu penjumlahan atau pengurangan matriks.

Contoh 1 :

Jika diketahui skalar k = 5 dan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan tentukan matriks 5A dengan menggunakan MS Excel

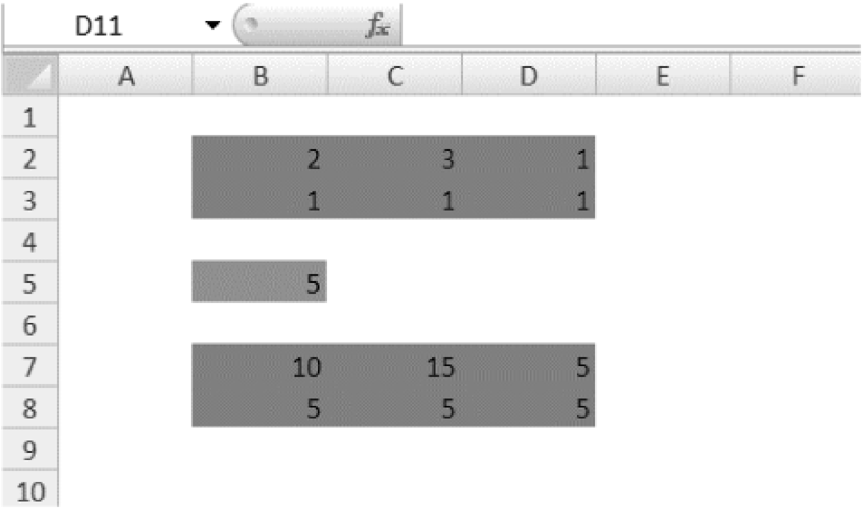
Jawab :

1. Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D3 dan skalar ditulis pada range B5).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil perkalian (misal ditulis di B6:D8).
3. Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Kemudian masukan rumus berikut "=B5*B2:D3" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan

memblok *range* yang akan dikalikan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range B7:D8, seperti tampak pada gambar di bawah ini :



5. Jadi hasilnya adalah B = $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Contoh 2 :

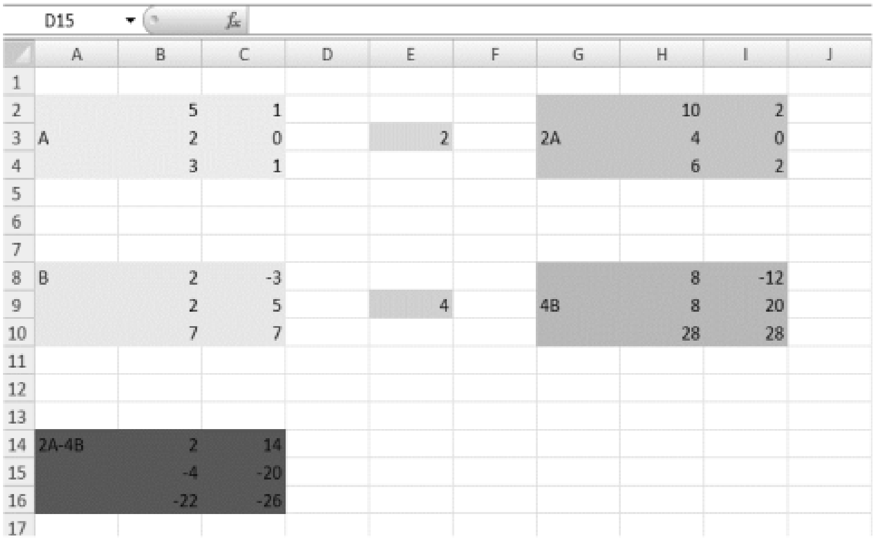
Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ maka tentukan 2A – 4B dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Untuk menentukan matriks 2A – 4B maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A dan skalar 2, kemudian tentukan matriks 2A.

2. Tuliskan matriks B dan skalar 4, kemudian tentukan matriks 4B.
3. Tentukan 2A – 4B
4. Perhatikan *capture* di bawah ini :



D15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		5	1					10	2	
3	A	2	0		2		2A	4	0	
4		3	1					6	2	
5										
6										
7										
8	B	2	-3					8	-12	
9		2	5		4		4B	8	20	
10		7	7					28	28	
11										
12										
13										
14	2A-4B	2	14							
15		-4	-20							
16		-22	-26							
17										

5. Sehingga hasil yang terjadi adalah :

$$2A - 4B = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ -4 & -20 \\ -22 & -26 \end{bmatrix}$$

C. Menentukan Perkalian Dua Matriks

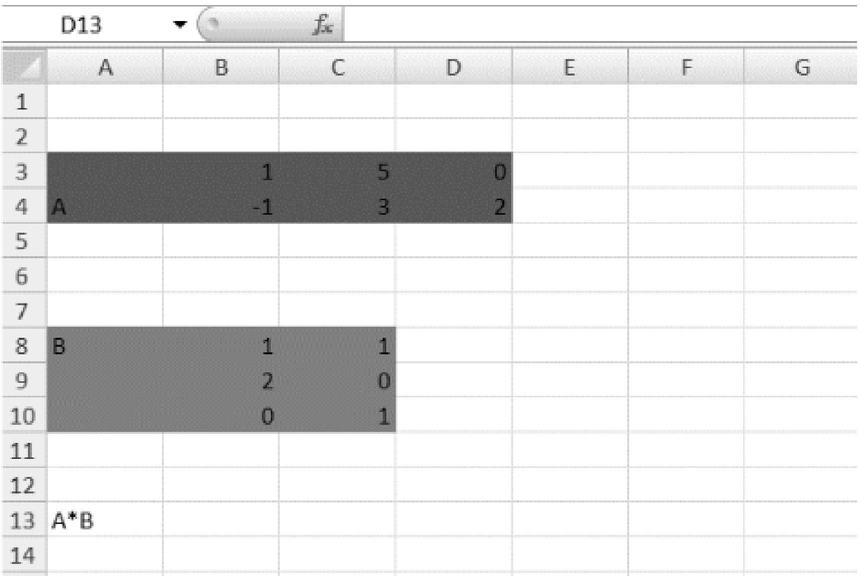
Contoh 1 :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan A.B dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Untuk menentukan matriks A. B maka yang harus dilakukan adalah :

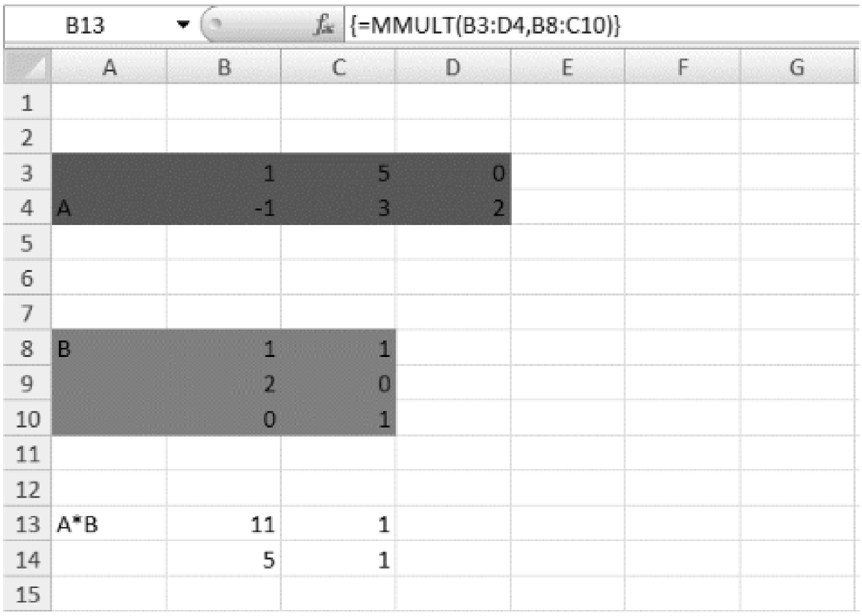
1. Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4 dan matriks B ditulis dalam range B8:C10).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil perkalian (misal ditulis di B13:C14).
3. Perhatikan *capture* berikut ini :



D13 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		1	5	0			
4	A	-1	3	2			
5							
6							
7							
8	B	1	1				
9		2	0				
10		0	1				
11							
12							
13	A*B						
14							

4. Menentukan hasil dengan menggunakan perintah =MMULT(array1,array2) , dimana array1 adalah matriks A dan array 2 adalah matriks B, sehingga hasilnya seperti pada *capture* di bawah ini :



5. Hasil dari perkalian matriks A dan B adalah : $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 2 :

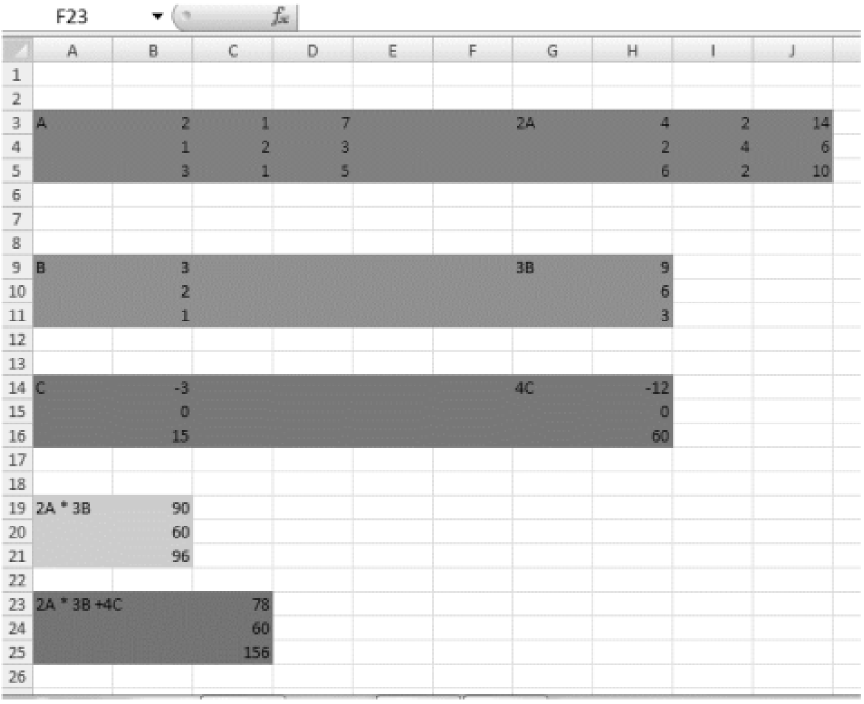
Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ maka tentukan 2A x 3B + 4C dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Untuk menentukan matriks 2A x 3B + 4C maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A, kemudian tentukan matriks 2A
2. Tuliskan matriks B, kemudian tentukan matriks 3B
3. Tentukan matriks C, kemudian tentukan matriks 4C

4. Tentukan matriks 2A x 3B
5. Tentukan matriks 2A x 3B + 4C
6. Perhatikan *capture* di bawah ini :



F23

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	2	1	7			2A	4	2	14
4		1	2	3				2	4	6
5		3	1	5				6	2	10
6										
7										
8										
9	B	3					3B	9		
10		2						6		
11		1						3		
12										
13										
14	C	-3					4C	-12		
15		0						0		
16		15						60		
17										
18										
19	2A * 3B	90								
20		60								
21		96								
22										
23	2A * 3B +4C		78							
24			60							
25			156							
26										

D. Menentukan Transpose Matriks

Contoh 1 :

Tentukan transpose dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

1. Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:C5).

2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil tranpose (misal ditulis di B8:D9).
3. Perhatikan *capture* berikut ini :

C10 f_x

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	A	1	-1			
4		3	2			
5		1	2			
6						
7						
8	AT					
9						
10						

4. Pada range yang telah disiapkan, diketikkan formula: **=TRANSPOSE (B3:C5),** kemudian tekan tombol CTRL SHIFT ENTER sehingga hasilnya adalah :

D12 f_x

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	A	1	-1		
4		3	2		
5		1	2		
6					
7					
8	AT	1	3	1	
9		-1	2	2	
10					

Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks C = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Untuk menentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$ maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A, kemudian tentukan matriks 3A
2. Tuliskan matriks B, kemudian tentukan matriks 4B
3. Tentukan matriks C, kemudian tentukan matriks 5C
4. Tentukan matriks 3A x 4B
5. Tentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$
6. Perhatikan *capture* di bawah ini :

G21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A	5	1	3		3A	15	3	9	
2		2	0	1			6	0	3	
3		1	1	1			3	3	3	
4										
5										
6	B	2	1			4B	8	4		
7		2	0				8	0		
8		3	2				12	8		
9										
10										
11	C	4	2			5C	20	10		
12		1	-1				5	-5		
13		2	0				10	0		
14										
15										
16	3A*4B	252	132							
17		84	48							
18		84	36							
19										
20	3A*4B+5C	272	142							
21		89	43							
22		94	36							

LATIHAN

1. Jika diketahui : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Maka tentukan hasil operasi matriks di bawah ini tanpa aplikasi maupun dengan aplikasi MS Excel. Jika tidak ada hasilnya, maka sebutkan mengapa tidak ada hasilnya.

   a. AB d. DE g. 3C – D j. A(BC)

   b. D+E e. ED h. (3E)D k. (4B)C + 2B

   c. D – E f. –7B i. (AB)C l. D + E^2

2. Suatu toko menjual 125 kaleng sup tomat, 275 kaleng kacang, dan 400 kaleng tuna. Buatlah matriks baris yang memuat angka dari setiap barang yang dijual. Apabila masing-masing dihargai \$0.95, \$1.03 dan \$1.25 , tuliskan sebagai matriks kolom yang memuat angka dari setiap harga. Jika seluruh barang terjual habis, berapa penghasilan toko tersebut ? Kerjakan dengan matriks.

3. Suatu perusahaan pakaian, JCloth, memiliki dua pabrik yang terletak di Surabaya dan Malang. Di dua pabrik tersebut, JCloth memproduksi dua jenis pakaian, yaitu kaos dan jaket. Perusahaan tersebut memproduksi pakaian yang kualitasnya dapat dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu standard, deluxe, dan premium. Tahun kemarin, pabrik di Surabaya dapat memproduksi kaos sebanyak 3.820 kualitas standard, 2.460 kualitas deluxe, dan 1.540 kualitas premium, serta jaket sebanyak 1.960 kualitas standard, 1.240 kualitas deluxe, dan 920 kualitas premium. Sedangkan pabrik yang terletak di Malang dapat memproduksi kaos sebanyak 4.220 kualitas standard, 2.960 kualitas deluxe, dan 1.640 kualitas premium, serta jaket sebanyak 2.960 kualitas standard, 3.240 kualitas deluxe, dan 820 kualitas premium dalam periode yang sama.

a Tulislah "matriks produksi" dengan ordo 3×2 untuk masing-masing pabrik (S untuk Surabaya dan M untuk Malang), dengan kolom kaos, kolom jaket, dan tiga baris yang menunjukkan banyaknya jenis-jenis pakaian yang diproduksi.

b Gunakan matriks dari poin 1 untuk menentukan banyaknya pakaian dari masing-masing jenis yang telah diproduksi oleh pabrik di Surabaya dan Malang.

PETUNJUK JAWABAN LATIHAN

1. Agar dapat menentukan masing-masing jawaban pada soal nomer 1 ini, tentukan terlebih dahulu ordo matriks yang akan dioperasikan, kemudian tentukan apakah matriks tersebut dapat dioperasikan, sesuai dengan syarat yang telah dipelajari. Setelah syarat terpenuhi, maka lakukan pengoperasian matriks tersebut. Sebaliknya, jika syarat tidak terpenuhi, maka sebutkan alasan mengapa tidak dapat dioperasikan.

   Sebagai contoh, soal 1.a, kita tentukan terlebih dahulu ordo matriks A yaitu 3x2, kemudian matriks B yaitu 2x2, sehingga menurut syarat perkalian matriks, matriks A dan B dapat dikalikan, karena syarat bahwa banyak nya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B terpenuhi. Setelah syarat tentang ordo terpenuhi, maka dilanjutkan dengan melakukan perhitungan, seperti di bawah ini :

   $$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{bmatrix} 3.4 + 0.0 & 3.(-1) + 0.2 \\ (-1).4 + 2.0 & (-1).(-1) + 2.2 \\ 1.4 + 1.0 & 1.(-1) + 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Banyaknya kaleng yang dijual ditulis sebagai matriks baris berukuran 1x3, sedang harga ditulis sebagai matriks kolom 3x1, sehingga penghasilan toko tersebut

didapatkan dengan mengalikan matriks ordo 1x3 dengan 3x1.

3. Dengan mengikuti petunjuk pada soal, maka matriks produksi dapat ditulis sebagai :

   a. $S = \begin{bmatrix} 3820 & 2460 & 1540 \\ 1960 & 1240 & 920 \end{bmatrix}$

      $M = \begin{bmatrix} 4220 & 2960 & 1640 \\ 2960 & 3240 & 820 \end{bmatrix}$

   a. Banyaknya pakaian dari masing-masing jenis yang diproduksi di Surabaya dan Malang, didapatkan dari penjumlahan kedua matriks.

TES FORMATIF

1. *Widget Company* memuat laporan penjualan bulanannya dengan menggunakan matriks yang bagian barisnya menunjukkan secara berurutan, jumlah model regular, deluxe, dan eksterm yang dijualnya, dan kolomnya menunjukkan jumlah unit, secara berurutan, berwarna merah, putih, biru dan ungu yang dijual. Matriks untuk bulan Januari dan Februari masing-masing adalah :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a Berapa banyak model ekstrem putih yang dijualpada bulan Januari?
   b Berapa banyak model deluxe biru yang dijual pada bulan Februari?
   c Pada bulan apakah model regular ungu lebih banyak dijual?
   d Model dan warna manakah yang memiliki jumlah penjualan yang sama di kedua bulan?
   e Bulan manakah model deluxe lebih banyak dijual?
   f Bulan manakah unit berwarna merah lebih banyak dijual?
   g Berapa banyak widget yang terjual di bulan Januari?

2. Berat badan Bob adalah 178 pon. Dia ingin mengurangi berat badannya melalui satu rencana diet dan latihan fisik. Sesudah mencari keterangan dari Tabel 1 dia membuat jadwal latihan fisik seperti dalam Tabel 2. Berapa kalori yang akan terbakar pada setiap harinya dengan melakukan latihan fisik jika dia mengikuti rencana ini ?

Tabel 1

KALORI YANG TERBAKAR SETIAP JAM

Aktivitas latihan	**Berat dalam pon**			
	152	**161**	**170**	**178**
Jalan kaki 2 mil/jam	213	225	237	249
Lari 5,5 mil/jam	651	688	726	764
Bersepeda 5,5 mil/jam	304	321	338	356
Tenis (secukupnya)	420	441	468	492

Tabel 2

JUMLAH JAM PER HARI UNTUK SETIAP AKTIVITAS

	Jadwal latihan			
	Jalan	Lari	Bersepeda	Tenis
Senin	1,0	0,0	1,0	0,0
Selasa	0,0	0,0	0,0	2,0
Rabu	0,4	0,5	0,0	0,0
Kamis	0,0	0,0	0,5	2,0
Jumat	0,4	0,5	0,0	0,0

3. Suatu perusahaan menghasilkan tiga produk. Biaya produksinya dibagi dalam 3 kategori. Pada setiap kategori ini, diberikan suatu taksiran untuk biaya produksi suatu barang dari masing masing produk. Dibuat juga suatu taksiran untuk jumlah dari masing masing produk yang akan dihasilkan untuk setiap kuartal. Taksiran taksiran ini diberikan dalam tabel 1 dan 2 di bawah ini. Perusahaan tersebut ingin menyajikan pada rapat pemegang saham satu tabel yang menunjukkan biaya total untuk setiap kuartal dalam masing masing dari ketiga kategori: bahan mentah, tenaga kerja dan biaya tambahan (overhead).

TABEL 1			
BIAYA PRODUKSI PER BARANG (dollar)			
BIAYA	Produk		
	A	**B**	**C**
Bahan mentah	0.1	0.3	0.15
Tenaga Kerja	0.3	0.4	0.25
Biaya tambahan	0.1	0.2	0.15

TABEL 2				
JUMLAH YANG DIHASILKAN PER KUARTAL				
PRODUK	MUSIM			
	Panas	**Gugur**	**Dingin**	**Semi**
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

4. **Matriks Input-Output.** Matriks Input-Output, yang dikembangkan oleh W.W. Leontief, mengindikasikan adanya interrelasi yang terjadi antara beragam sektor ekonomi selama periode tertentu. Contoh hipotesis dari suatu perekonomian sederhana dinyatakan dalam matriks M. Sektor konsumsi berimbang dengan sektor produksi dan dapat dianggap sebagai sektor manufaktur, pemerintah, baja, pertanian, rumah tangga dan sebagainya. Setiap baris menunjukkan bagaimana output dari sektor yang ada dikonsumsi oleh empat sektor. Sebagai contoh, total output Industri A, 50 untuk industri A sendiri, 70 untuk B, 200 untuk C, dan 360 untuk lainnya. Jumlah entri pada baris 1, yaitu 680, menjadi total output A pada periode tersebut. Setiap kolom memberikan jumlah output pada setiap sektor yang dikonsumsi oleh sektor tertentu. Sebagai contoh untuk memproduksi 680 unit, industri A mengonsumsi 50 unit A, 90 unit B, 120 unit C, dan 420 dari seluruh produsen lain.

Matriks M :

Produsen/ Konsumen	Industri A	Industri B	Industri C	Seluruh konsumen lain
Industri A	50	70	200	360
Industri B	90	30	270	320
Industri C	120	240	100	1050
Seluruh konsumen lain	420	370	940	4960

Pertanyaannya :

a. Untuk setiap kolom, carilah jumlah entrinya.
b. Lakukan juga untuk setiap baris dan apa yang kita amati dari perbandingan total angka tersebut?
c. Anggaplah sektor A meningkatkan outputnya sebesar 20% atau sekitar 136 unit,dengan mengasumsikan bahwa hasil ini terjadi akibat peningkatan 20% pada seluruh input secara seragam, berapa banyak unit yang harus ditingkatkan sektor B untuk menambah outputnya?
d. Jawablah pertanyaan yang sama untuk sektor C dan produsen lain.

UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitung jumlah skor pada masing-masing soal, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul ini :

Tingkat penguasaan =

$$\boxed{\frac{Jumlah\ skor\ pada\ \ masing-masing\ soal}{Jumlah\ soal}\ x\ 100\%}$$

Skor maksimal pada masing-masing soal adalah 25.

Arti tingkat penguasaan :

90 – 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan lebih dari 80%, maka ini berarti Anda sudah dapat dikategorikan menguasai modul 1, sehingga dapat melanjutkan ke modul 2. Namun jika Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulang kembali Modul 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. a. 1
   b. 2
   c. Februari
   d. Regular Biru dan Ekstrem Ungu
   e. Januari
   f. Januari

2. Kalori yang terbakar pada setiap hari nya adalah perkalian dua matriks:

$$[764 \quad 356 \quad 492 \quad 492] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[1256 \quad 984 \quad 483{,}6 \quad 1230 \quad 483{,}6]$$

Sehingga jumlah kalori yang terbakar adalah :
Senin = 1256 kalori
Selasa = 984 kalori
Rabu = 483.6 kalori
Kamis = 1230 kalori
Jumat = 483.6 kalori

3. Tabel masing-masing kebutuhan pada setiap kuartal untuk Bahan Mentah, Tenaga Kerja, dan Biaya Tambahan didapat dari perkalian antara kedua matriks :
$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 & 4500 & 4500 & 4000 \\ 2000 & 2600 & 2400 & 2200 \\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000 \end{bmatrix}$$
Setelah dua matriks dikalikan, kemudian pada masing-masing baris ditambahkan.

4. a. Kolom 2 : Untuk memproduksi 710 unit, industri B mengonsumsi 70 unit A, 30 unit B, 240 unit C, dan 370 dari seluruh produsen lain. Lanjutkan untuk kolom lain.
   b. Jumlah entri pada baris 2, yaitu 710, menjadi total output A pada periode tersebut. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa setiap industri membutuhkan input paling sedikit untuk memproduksi produknya sendiri. Contoh, produk A membutuhkan input

paling sedikit untuk memprodusi produk A sendiri, dan seterusnya.

c. Sektor B harus meningkatkan outputnya sebanyak = 0.2 x 710 = 142 unit.

d. Sektor C harus meningkatkan outputnya sebanyak = 0.2 x 1460 = 292 unit

"**Pendidikan** adalah kunci untuk membuka pintu emas kebebasan

--- George Washington Carter ---

MODUL

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

PENGANTAR

Setelah konsep matriks kita kuasai, maka materi yang tidak kalah penting dalam penyelesaian masalah bisnis adalah invers matriks. Untuk dapat mempelajari invers matriks dengan baik, maka harus didahului dengan mempelajari determinan matriks.

Invers matriks penting dalam penyelesaian masalah bisnis operasional, diantaranya untuk menyelesaikan persamaan linear berbasis masalah bisnis.

Pada modul ini, Anda akan mempelajari langkah demi langkah dari keseluruhan proses yang diperlukan, mulai dari perhitungan tanpa aplikasi/bantuan perangkat lunak apapun, dengan tujuan agar Anda memahami dengan baik konsepnya, dan dilanjut dengan menggunakan perangkat lunak pengolah angka, untuk soal yang sudah lebih kompleks.

Setelah mempelajari modul 2 ini, Anda diharapkan dapat menyelesaikan soal-soal latihan, tugas dan tes formatif yang ada pada modul ini.

Agar Anda dapat mengikuti dengan baik seluruh proses perkuliahan ini, maka Anda harus siapkan hal-hal berikut ini :

a. Komputer / laptop / handphone yang terhubung dengan Internet.

b. Telah bergabung dalam kelas Matematika Bisnis dalam aplikasi Brilian.
c. Mempunyai aplikasi pengolah angka dalam komputer/laptop Anda.
d. Install MatLab.
e. Install *reader QR Code.*
f. Buku elektronik wajib yang dimiliki :

dan

g. Video Pembelajaran yang wajib dicermati :

dan video lain dari Khan Academy

A KOMPETENSI UMUM

Setelah menyelesaikan seluruh materi pada Matematika Bisnis, mahasiswa mampu menyelesaikan masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan kajian matematis melalui analisis dan penggunaan informasi di dunia digital serta menggunakan aplikasi/rekayasa perangkat lunak.

B KOMPETENSI KHUSUS

Setelah menyelesaikan modul 1 ini, mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan invers matriks baik tanpa maupun menggunakan bantuan aplikasi pengolah angka serta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

C INDIKATOR

Setelah menyelesaikan pertemuan pada modul ini, maka diharapkan mahasiswa dapat :

1. Menentukan determinan matriks, baik dengan menggunakan aplikasi maupun tanpa menggunakan aplikasi (Penguasaan Literasi Teknologi).
2. Menerapkan sifat determinan matriks untuk menyederhanakan perhitungan determinan matriks dengan menggunakan *complex problem solving, social skill, process skill, dan system skill* (Penguasaan Literasi Manusia).
3. Mengoperasikan invers matriks dengan aturan pengoperasian yang didapat dari berbagai sumber yang menyajikan pengoperasian matriks, seperti Khan Academy dan lain lain (Penguasaan Literasi Teknologi).
4. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional dengan menggunakan invers matriks melalui kemampuan *complex problem solving* tanpa bantuan aplikasi (Penguasaan Literasi Manusia).
5. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional yang lebih kompleks dengan menggunakan invers matriks melalui kemampuan *complex problem solving* dengan bantuan aplikasi pengolah angka sederhana (Penguasaan Literasi Manusia dan Literasi Teknologi).

D URAIAN MATERI

1 DETERMINAN MATRIKS

A. Pengertian Determinan

Determinan merupakan suatu fungsi. Fungsi determinan merupakan suatu fungsi bernilai real dari suatu matriks bujur sangkar.

Determinan dinyatakan sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari matriks bujur sangkar A.

Determinan dari sebuah matriks bujur sangkar A, dinotasikan dengan det(A), atau $|A|$

B. Menentukan Nilai Determinan Matriks Berordo 2 x 2

Jika A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka det(A) = $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Contoh :

Tentukan nilai determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab : det (A) = 5 . 3 - (-4). 2 = 23.

C. Menentukan Nilai Determinan Matriks Berordo 3 x 3 dengan Aturan Sarrus.

Jika B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, maka menentukan nilai det(B), dilakukan dengan cara:

- Tambahkan kolom ke 1 dan ke 2 dari matriks yang hendak ditentukan nilai determinannya, sebagai kolom bayangan, sehingga determinannya menjadi :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

- Kalikan masing masing elemen pada diagonal utama, kemudian jumlahkan, setelah itu kurangkan dengan hasil kali masing masing elemen pada diagonal yang bukan diagonal utama.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

-   -   -   +   +   +

Sehingga: $|B|$ =$b_{11}.b_{22}.b_{33}+b_{12}.b_{23}.b_{31}+b_{13}.b_{21}.b_{32}-b_{12}.b_{21}.b_{33}-b_{11}.b_{23}.b_{32}-b_{13}.b_{22}.b_{31}$

Contoh :

Tentukan nilai determinan dari matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

<u>**Jawab**</u> : $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.(-4).(-8)-2.

(-4).9-1.6.(-8)-3.5.7

= 45+84+96+72+48-105= 240

D. Sifat-Sifat Determinan

1. Jika setiap elemen suatu baris atau kolom dari suatu matriks bujur sangkar A bernilai nol, maka **det (A) = 0**.

   Contoh :

   Jika diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, maka tentukan det(A)

   <u>**Jawab**</u> : Karena semua elemen pada baris ke 2 adalah 0, maka nilai dari det(A) = 0.

Contoh :

Jika diketahui B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan det(B)

<u>Jawab</u> : Karena semua elemen pada kolom ke 3 adalah 0, maka nilai dari det(A) = 0.

2. Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka **det (A) = det (A^T).**

   Contoh :

   Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, dan det(A) = 26, maka tentukan det(A^T).

   <u>Jawab</u> : karena telah diketahui bahwa det(A) = 26, maka berdasar sifat b, nilai det(A^T)=det(A) = 26

3. Jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom pada determinan dari matriks A dikalikan dengan suatu skalar k, maka k bisa dikeluarkan dari tanda determinan, atau : **det(kA) = k.det(A).**

   Contoh :

   Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, dan det(A) = 26, maka tentukan det(3A).

Jawab : karena telah diketahui bahwa det(A) = 26, maka berdasar sifat c, nilai det(3A)=3.det(A)=3.26=78.

4. Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan cara mempertukarkan dua baris atau dua kolom, maka **det(B) = - det(A).**

   Contoh :

   Jika diketahui matriks A= $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ dan det(A)= 26,

   maka tentukan det (B), di mana B = $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   Jawab :

   Matriks B didapat dengan mempertukarkan baris ke 1 dan baris ke 3, sehingga menurut sifat d, det(B)=-det(A)= -26.

5. Jika dua baris atau kolom matriks A identik, maka **det(A) = 0**.

   Dua matriks dikatakan identik , jika suatu baris merupakan hasil kali dengan skalar k (di mana k anggota bilangan real) dari baris yang lain, atau suatu kolom merupakan hasil kali dengan skalar k (di mana k anggota bilangan real) dari kolom yang lain.

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 9 & 8 & 18 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, maka tentukan det (A).

Jawab :

Karena kolom ke 3, merupakan hasil dari kolom ke 1 yang dikalikan dengan skalar 2, maka dikatakan kolom ke 3 dan kolom ke 1 adalah identik. Ini berarti det(B) = 0.

Contoh :

Jika diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ f & p & i \end{bmatrix}$, tentukan nilai dari det(B)

Jawab:

karena baris ke 2, merupakan hasil dari baris ke 1 yang dikalikan dengan skalar 4, maka det(B) =0,

6. Jika A dan B dua matriks bujur sangkar yang mempunyai ukuran sama, maka **det(AB) = det(A) det(B).**

Contoh :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, dan det(A) =-137, serta diketahui B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 10 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ dan det(B) = -119, maka tentukan det (AB).

Jawab :

det(AB) = det(A) det(B) = =-137.-19 = 16303.

E. Menentukan Determinan Matriks n x n dengan Matriks Kofaktor

Sebelum mengenal Kofaktor, kita coba untuk memahami pengertian Minor :

Minor dari suatu matriks bujur sangkar A adalah harga determinan sub matriks yang tetap, setelah menghilangkan baris ke i dan kolom ke j. Minor dari baris ke i dan kolom ke j, dinotasikan dengan $\mathbf{M_{ij}}$.

Sebagai contoh, jika hendak ditentukan nilai dari M_{12} dari suatu matriks bujur sangkar berordo 3x3, maka harus ditentukan nilai determinan dari matriks berordo 2x2, setelah baris ke 1 dan kolom ke 2 dicoret (dihilangkan).

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka tentukan M_{13} dan M_{22}

<u>Jawab</u> :

M_{13} = nilai determinan dari matriks berordo 2x2, dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 3= $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$=-16

M_{22} = nilai determinan dari matriks berordo 2x2, dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 2= $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$= 62

Contoh :

Diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -8 \\ 3 & -9 & 5 & 2 \\ -10 & -8 & -7 & -1 \\ -6 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix}$, maka tentukan M_{24} dan M_{13}

<u>Jawab</u> :

M_{24} = nilai determinan dari matriks berordo 4x4, dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 4 = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -10 & -8 & -7 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$= 228

M_{13} = nilai determinan dari matriks berordo 4x4, dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 3 = $\begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ -10 & -8 & -1 \\ -6 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ = 939

Setelah dipelajari minor, kita akan mempelajari kofaktor dari suatu matriks bujur sangkar.

Kofaktor dari suatu matriks bujur sangkar dilambangkan dengan c_{ij}, yaitu

$$\mathbf{c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Contoh **:**

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka tentukan c_{13}, c_{22} dan c_{32}.

__**Jawab**__ :

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 62$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(-52) = 52$$

Setelah memahami cara mencari Kofaktor, maka kita akan mempelajari cari mencari determinan dari suatu matriks bujur sangkar berordo nxn, dengan menggunakan matriks kofaktor.

F. Mencari Determinan Matriks Bujur Sangkar A dengan Matriks Kofaktor

Terdapat 2 cara, yaitu :

Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke i :

$\det(A) = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}\,c_{i2} + \ldots + a_{in}\,c_{in}$

Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke j :

$\det(A) = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}\,c_{2j} + \ldots + a_{nj}\,c_{nj}$

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan determinan matriks A dengan berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke 2 dan kolom ke 3

Jawab :

Menentukan nilai determinan A berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke 2 :

$\det(A) = a_{21}.c_{21} + a_{22}\,c_{22} + a_{23}\,c_{23}$

$= 7.\,(-1)^3\,M_{21} + 1.\,(-1)^4\,M_{22} + 9.\,(-1)^5\,M_{23}$

$$= -7. \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$= -7. \ 54 + 62 + (-9) .14$

$= -442$

Menentukan nilai determinan A berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke 3:

$\det(A) = a_{13}.c_{13} + a_{23}\ c_{23} + a_{33}\ c_{33}$

$= 10. (-1)^4\ M_{13} + 9. (-1)^5\ M_{23} + 6. (-1)^6\ M_{33}$

$$= 10. \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 6. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 10. (-16) + (-9).14 + 6. (-26)$

$= -442$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa menentukan nilai determinan dari suatu matriks, boleh dipilih berdasar ekspansi baris maupun kolom manapun. Ini berarti, jika pada matriks yang akan ditentukan nilai determinannya mengandung satu baris atau kolom yang mengandung angka nol, sebaiknya dipilih berdasar baris atau kolom tersebut, karena akan mempersingkat perhitungan ($a_{ij} = 0$, sehingga $a_{ij}.c_{ij} = 0$).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan nilai det(A).

Jawab :

Untuk menentukan nilai dari determinan matriks A ini, sebaiknya diekspansikan berdasar baris ke 1, karena pada baris itulah terbanyak terdapat angka 0, sehingga:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}.c_{11} + a_{12}\, c_{12} + a_{13}\, c_{13} \\ &= 0.c_{11} + 0.\, c_{12} + 10.\, c_{13} \\ &= 0 + 0 + 10.\, (-1)^4\, M_{13} \\ &= 10.\ M_{13} = 10. \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 10.\ (-16) = -160. \end{aligned}$$

2

INVERS MATRIKS

A. Pengertian Invers Matriks

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar berordo sama, dan berlakulah A.B = B.A = I, maka dikatakan **A = B $^{-1}$**, dan **B = A $^{-1}$**, atau dibaca **: A adalah invers dari B**, dan sebaliknya **B adalah invers dari A.**

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Maka dikatakan, A adalah invers dari B, dan B adalah invers dari A, karena

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

B. Sifat-Sifat Invers Matriks

Jika A adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai invers, maka :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, di mana $n \in B^+$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, dimana k = skalar, $k \in R$, $k \neq 0$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(A.B)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

C. Mencari Invers Matriks Berordo 2 x 2

Jika A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

maka A^{-1} = $\dfrac{1}{a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$,

dimana det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \neq 0$

Dari rumus di atas, dapat diketahui bahwa **tidak** setiap matriks bujur sangkar mempunyai invers. Matriks bujur sangkar tidak mempunyai invers, jika nilai determinannya sama dengan nol.

Contoh :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan A^{-1}

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{1}{1.0 - 2.3} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kebenaran dari perhitungan kita, maka dapat dilihat dengan cara mengalikan matriks A dengan matriks A^{-1}, apakah menjadi matriks Identitas atau tidak.

Jadi, kita tentukan A. A^{-1} = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

D. Mencari Invers Matriks Berordo n x n dengan Matriks Kofaktor

Jika A adalah matriks bujur sangkar berordo n x n, maka :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.\mathbf{adj\ A}}$$

adj A = adjoint dari matriks bujur sangkar A = $(C_A)^T$

$C_A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, dimana cij = $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Syarat : det (A) ≠ 0

Untuk mencari invers matriks, syarat bahwa determinan matriks ≠ 0, harus diselidiki terlebih dahulu, karena jika det = 0, maka dapat disimpulkan bahwa matriks tersebut tidak mempunyai Invers.

Contoh 1 :

Tentukan A^{-1} dari matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Jawab :

Untuk mencari invers matriks A, selidiki terlebih dahulu det(A). Setelah dihitung, ternyata det(A) = 0, sehingga, dapat disimpulkan bahwa A^{-1} tidak ada, tanpa perlu ditentukan matriks adjointnya.

Contoh 2 :

B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan matriks B^{-1}

Jawab :

Karena det(B) = -2, det (B) ≠ 0, maka dicari matriks adjoint dari matriks B, dengan cara mencari matriks Kofaktornya terlebih dahulu:

$c_{11} = (-1)^{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$

$c_{23} = (-1)^{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$c_{12} = (-1)^{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$c_{31} = (-1)^{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$c_{13} = (-1)^{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$ $\quad c_{32} = (-1)^{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -2$

$c_{21} = (-1)^{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$ $\quad c_{33} = (-1)^{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$c_{22} = (-1)^{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$C_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{adj}(B) = C_B^{\,T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3

MENENTUKAN DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS DENGAN MS EXCEL

A. Menentukan Determinan Matriks

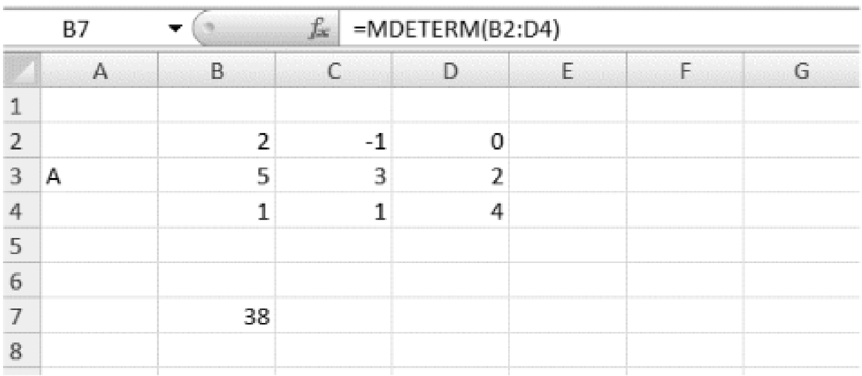
Contoh 1:

Tentukan nilai determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

Untuk menentukan determinan matriks A, dapat dilakukan dengan langkah berikut :

a. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4)
b. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan nilai determinan (misalkan cell B7)
c. Tuliskan formula : **=mdeterm(array)** pada cell yang telah disediakan, lalu tekan enter, hingga menghasilkan nilai dari determinan matriks A
d. Perhatikan *capture* berikut :


B7 =MDETERM(B2:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		2	-1	0			
3	A	5	3	2			
4		1	1	4			
5							
6							
7		38					
8							

e. Jadi hasil dari determinan matriks A adalah 38.

Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

maka tentukan nilai determinan dari matriks B x A

Jawab :

1. Tuliskan matriks A,
2. Tuliskan matriks B,
3. Tentukan matriks B x A,
4. Tentukan determinan matriks B x A

B9 f_x {=MMULT(B5:B7,B3:D3)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	2	7	5			
4							
5	B	1					
6		-2					
7		7					
8							
9	Bx A	2	7	5			
10		-4	-14	-10			
11		14	49	35			
12							
13							

B. Menentukan Invers Dari Suatu Matriks

Contoh 1 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -4 & 14 & -10 \\ 14 & 35 & 23 \end{bmatrix}$, maka tentukan invers dari matriks A.

Jawab :

Untuk menentukan invers dari matriks A, maka dapat dilakukan dengan langkah berikut :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B9:D11).
3. Pada range yang akan digunakan untuk menentukan inverse, tuliskan formula : =minverse(array), kemudian tekan ctrl shift enter, sehingga hasilnya menjadi :

E9

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	A	2	5	5			
5		-4	14	-10			
6		14	35	23			
7							
8							
9		-1.16667	-0.10417	0.208333			
10	Inverse A	0.083333	0.041667	0			
11		0.583333	0	-0.08333			
12							

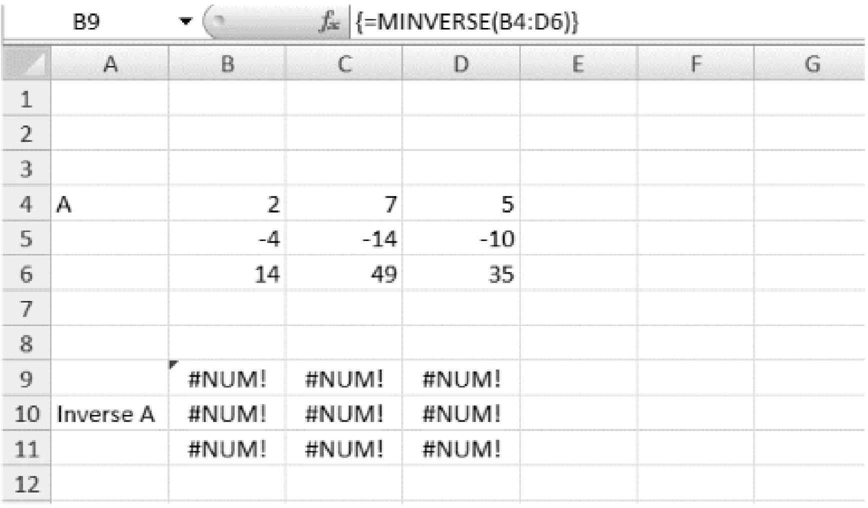
Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -4 & -14 & -10 \\ 14 & 49 & 35 \end{bmatrix}$, maka tentukan invers dari matriks A.

Jawab :

Untuk menentukan invers dari matriks A, maka dapat dilakukan dengan langkah berikut :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B9:D11).
3. Pada range yang akan digunakan untuk menentukan inverse, tuliskan formula : =minverse(array), kemudian tekan ctrl shift enter, sehingga hasilnya menjadi :



B9 {=MINVERSE(B4:D6)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	A	2	7	5			
5		-4	-14	-10			
6		14	49	35			
7							
8							
9		#NUM!	#NUM!	#NUM!			
10	Inverse A	#NUM!	#NUM!	#NUM!			
11		#NUM!	#NUM!	#NUM!			
12							

Hasil dari inverse tidak ada, karena ternyata determinan dari matriks A = 0.

LATIHAN

1. Tentukan nilai dari determinan dan invers dari matriks $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ dengan perhitungan manual maupun dengan MS Excel.
2. Tentukan invers dari matriks $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ dengan perhitungan manual maupun dengan MS Excel.
3. Tentukan invers dari matriks $D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 12 & -16 \end{bmatrix}$ dengan perhitungan manual maupun dengan MS Excel.

PETUNJUK JAWABAN LATIHAN

1. Jika perhitungan tanpa menggunakan MS Excel, maka pertama hitung terlebih dahulu determinannya. Jika determinan tidak sama dengan nol, maka lanjutkan menghitung inversnya.

2. Demikian pada soal nomer 2, karena determinan = 0, maka invers tidak ada.
3. Untuk menentukan determinan pada matriks D, Anda harus jeli bahwa baris ke 3 adalah 4 kali dari baris 1, sehingga dengan menggunakan sifat determinan, dapat diketahui bahwa determinan matriks D adalah = 0, sehingga invers nya tidak ada.

TES FORMATIF

1. Suatu pabrik mobil memproduksi dua model, A dan B. Model A membutuhkan 1 jam kerja untuk mengecat dan ½ jam kerja untuk mengilapkan. Model B membutuhkan 1 jam kerja untuk masing-masing proses tersebut. Selama tiap jam kerja yang dioperasikan, terdapat 100 jam kerja yang tersedia untuk mengecat dan 80 jam kerja untuk mengilapkan.
   a. Berapa banyak model mobil yang dapat diproduksi setiap jamnya, jika semua jam kerja yang tersedia didayagunakan?
   b. Anggap setiap model membutuhkan 10 widget dan 14 shim serta setiap model B membutuhkan 7 widget dan 10 shim. Pabrik tersebut bisa mendapatkan 800 widget dan 1130 shim setiap jam nya. Berapa banyak mobil dari setiap model dapat diproduksi dengan menggunakan semua suku cadang yang tersedia?

2. Seorang teman telah mengirimkan temannya satu pesan rahasia yang terdiri dari tiga baris matriks barus berikut :

$$R1 = [\,33 \quad 87 \quad 70\,]$$

$$R2 = [57 \quad 133 \quad 20]$$

$$R3 = [38 \quad 90 \quad 33]$$

Kedua teman tersebut telah mengingat matriks berikut (teman yang pertama menggunakannya untuk memberikan kode pesan tersebut).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Asumsikan bahwa huruf alphabet sesuai dengan angka 1 hingga 26. ganti angka-angka pada tiga matriks sebelumnya dengan huruf dan carilah pesannya.

UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitung jumlah skor pada masing-masing soal, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul ini :

Tingkat penguasaan =

$$\frac{Jumlah\ skor\ pada\ \ masing-masing\ soal}{Jumlah\ soal}\ x\ 100\%$$

Skor maksimal pada masing-masing soal adalah 50.

Arti tingkat penguasaan :

90 – 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan lebih dari 80%, maka ini berarti Anda sudah dapat dikategorikan menguasai modul 1, sehingga dapat melanjutkan ke modul 2. Namun jika Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulang kembali Modul 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. a. Tulis terlebih dahulu menjadi kalimat matematika :

$$x + y = 100$$

$$0.5x + y = 20$$

Kemudian, ubah menjadi perkalian dua matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Namakan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks A, sedang matriks $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ adalah matriks X dan matriks $\begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}$ adalah matriks B, sehingga menjadi perkalian dua matriks :

$$A. X = B$$

Matriks yang dicari adalah matriks X, untuk mendapatkannya, dengan jalan mengalikan kedua ruas dengan matriks A, sehingga :

$$A^{-1}.A. X = A^{-1}.B$$

$$I. X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B$$

Jadi, untuk mendapatkan nilai dari x dan y dengan jalan mencari invers dari matriks A, kemudian hasilnya dikalikan dengan matriks B.

b. Cara yang sama dengan soal a, hanya dengan mengganti angka yang sesuai.

2. Soal ini adalah bagian dari kriptografi, untuk dapat memecahkannya, maka kalikan matriks yang elemennya terdiri dari R1, R2 dan R3, dengan invers dari A, kemudian hubungkan dengan kode abjad, jadi misalnya huruf A dilambangkan dengan 1, B dengan 2 dst.

Jika tertarik mengenai kriptografi, dapat dibaca di :

MODUL

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

PENGANTAR

Sistem Persamaan Linear (SPL) sangat bermanfaat dalam pemecahan masalah pada kehidupan sehari-hari, diantaranya untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam bisnis operasional yang melibatkan beberapa variabel.

Untuk dapat menyelesaikan SPL, maka terdapat beberapa langkah yang harus dilakukan, adalah : 1). Mengubah kalimat-kalimat pada soal cerita menjadi beberapa kalimat matematika (model matematika), sehingga membentuk sistem persamaan linear 2). Menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan matriks ; dan 3). Menggunakan penyelesaian yang diperoleh untuk menjawab pertanyaan pada soal cerita.

Pada bab ini, penyelesaian dari SPL memang dikhususkan dengan menggunakan matriks dan invers matriks, karena SPL pada modul ini dimaksudkan sebagai contoh salah satu penerapan matriks maupun invers matriks yang telah kita bahas pada modul 1 dan modul 2.

Pada modul ini, Anda akan mempelajari langkah demi langkah dari keseluruhan proses yang diperlukan, mulai dari perhitungan tanpa aplikasi/bantuan perangkat lunak apapun, dengan tujuan agar Anda memahami dengan baik konsepnya, dan dilanjut dengan menggunakan perangkat lunak pengolah angka, untuk soal yang sudah lebih kompleks.

Setelah mempelajari modul 3 ini, Anda diharapkan dapat menyelesaikan soal-soal latihan, tugas dan tes formatif yang ada pada modul ini.

Agar Anda dapat mengikuti dengan baik seluruh proses perkuliahan ini, maka Anda harus siapkan hal-hal berikut ini :

a. Komputer / laptop / handphone yang terhubung dengan Internet.
b. Telah bergabung dalam kelas Matematika Bisnis dalam aplikasi Brilian.
c. Mempunyai aplikasi pengolah angka dalam komputer/laptop Anda.
d. Install MatLab.
e. Install *reader QR Code.*
f. Buku elektronik wajib yang dimiliki :

(i). (ii) (iii)

g. Video Pembelajaran yang wajib dicermati :

dan video lain dari Khan Academy.

A KOMPETENSI UMUM

Setelah menyelesaikan seluruh materi pada Matematika Bisnis, mahasiswa mampu menyelesaikan masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan kajian matematis melalui analisis dan penggunaan informasi di dunia digital serta menggunakan aplikasi/rekayasa perangkat lunak.

B KOMPETENSI KHUSUS

Setelah menyelesaikan modul 3 ini, mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan SPL baik tanpa maupun menggunakan bantuan aplikasi pengolah angka maupun *software* MatLabserta memanfaatkan aplikasi pembelajaran Brilian.

C INDIKATOR

Setelah menyelesaikan pertemuan pada modul ini, maka diharapkan mahasiswa dapat :

1. Menentukan definisi dari SPL yang didapat dari berbagai sumber data dan informasi melalui jaringan internet (Penguasaan Literasi Data).
2. Menemukan manfaat dari SPL dari contoh-contoh yang didapat melalui berbagai sumber data dan informasi melalui jaringan internet (Penguasaan Literasi Data).
3. Menyelesaikan SPL dari beberapa variabel dengan menggunakan kemampuan *complex problem solving, social skill, process skill, dan system skill* (Penguasaan Literasi Manusia) dan melalui beberapa sumber yang ada di Internet, seperti Khan Academy dan lain lain (Penguasaan Literasi Teknologi).
4. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional dengan menggunakan SPL melalui kemampuan *complex problem solving* tanpa bantuan aplikasi (Penguasaan Literasi Manusia).
5. Menyelesaikan perhitungan proses bisnis operasional yang lebih kompleks dengan menggunakan SPL melalui kemampuan *complex problem solving* dengan bantuan aplikasi pengolah angka sederhana (Penguasaan Literasi Manusia dan Literasi Teknologi).

D URAIAN MATERI

1 PENGERTIAN

Sebuah himpunan ter-hingga persamaan dalam peubah peubah x_1, x_2, x , ...x_n disebut **Sistem Persamaan Linear**. Sederet angka $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut penyelesaian sistem tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ...,$x_n = s_n$ merupakan penyelesaian dari setiap persamaan dalam sistem tersebut. Misalnya sistem :

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

mempunyai penyelesaian $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, karena nilai nilai ini memenuhi kedua persamaan di atas. Aakan tetapi $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$, bukanlah penyelesaian, karena nilai nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari sistem.

Bentuk Umum dari SPL adalah :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3n} x_n = b_3$$
....
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

2

JENIS-JENIS SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Jenis jenis Sistem Persamaan Linear yang akan dibahas pada diktat ini adalah :

a. SPL dengan banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel.
b. SPL dengan banyaknya persamaan tidak sama dengan banyaknya variabel.
c. SPL Homogen

3

JENIS-JENIS PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

a. Penyelesaian Konsisten

Arti : SPL mempunyai sekurang kurangnya 1 (satu) penyelesaian.

Penyelesaian Konsisten ini terbagi menjadi 2 kemungkinan :

- Mempunyai tepat 1 (satu) penyelesaian.

  Artinya, SPL tersebut, hanya mempunyai tepat 1 penyelesaian, tidak ada penyelesaian lain. Contoh : SPL
  $x + 2y = 12$
  $4x + y = 13$

Mempunyai tepat 1 penyelesaian, yaitu: $x=2$ dan $y=5$.

Jika digambarkan, maka terlihat 2 garis lurus yang saling memotong, tepat di 1 titik.

- Mempunyai tak hingga penyelesaian

  Artinya, SPL tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian (mempunyai penyelesaian yang tidak dapat dihitung banyaknya). Contoh : SPL.

  $x + 2y = 10$

  $2x + 4y = 20$

  Mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, yaitu :

x	1	2	3	..	..	..
y	9/2	4	7/2	..	..	..

  Jika digambarkan, maka akan terlihat 2 garis lurus yang saling berimpit.

b. Penyelesaian tak Konsisten

Arti : SPL tidak mempunyai penyelesaian, contoh :

$x + 2y = 10$
$2x + 4y = 5$
SPL di atas tidak ada penyelesaiannya.

Jika digambarkan, akan berupa 2 garis yang sejajar, sehingga tidak ada titik potongnya.

4

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN 2 PERSAMAAN DAN 2 VAREABEL

Terdapat 2 metoda yang akan dibahas, yaitu :

a. Metoda Eliminasi

Metoda ini mendasarkan diri pada penggantian satu variabel pada variabel yang lain.

Contoh : Tentukan penyelesaian dari : $x + 2y = 12$

$4x + y = 13$

Jawab : Secara acak, kita ambil salah satu persamaan, andaikan kita ambil persamaan pertama : $x + 2y = 12$ $\leftrightarrow$ $x = 12 - 2y$, kemudian gantikan x kepada persamaan ke dua, sehingga :

$4x + y = 13 \leftrightarrow 4(12 - 2y) + y = 13$

$\leftrightarrow 48 - 8y + y = 13$

$\leftrightarrow -7y = -35$

$\leftrightarrow y = 5$

Sehingga : $x = 12 - 2.5 = 12 - 10 = 2$

b. Metoda Substitusi

Metoda ini mendasarkan diri untuk menentukan nilai dari salah satu variabel dengan cara menghilangkan variabel lainnya.

Contoh : Tentukan penyelesaian dari : $x + 2y = 12$

$$4x + y = 13$$

Jawab : Andaikan hendak ditentukan nilai dari variabel x, maka harus dihilangkan variabel y :

$$\begin{array}{rl|l|l} x + 2y = 12 & & x1 & x + 2y = 12 \\ 4x + y = 13 & & x2 & 8x + 2y = 26 \quad - \\ \hline & & & -7x = -14, \quad x = 2 \end{array}$$

Untuk mencari nilai dari variabel y, maka dapat digunakan persamaan manapun dari persamaan yang ada, misalnya gunakan persamaan :

$4x + y = 13$, jika digantikan $x = 2$, maka akan didapatkan $y = 5$.

5

MENYELESAIKAN SPL DENGAN n PERSAMAAN DAN n VAREABEL DENGAN MENGGUNAKAN METODA MATRIKS

Menyelesaikan SPL dengan menggunakan Metoda Matriks, maka SPL harus diubah terlebih dahulu menjadi Perkalian 2 Matriks, atau secara umum :

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3n}\, x_n = b_3$

....

$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n$

Diubah menjadi Perkalian 2 Matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Andaikan matriks A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, matriks

X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan

Matriks B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$, maka perkalian dua matriks dapat dilambangkan dengan :

A.X = B

A^{-1}. A. X = A^{-1}.B

I.X = A^{-1}.B

X = A^{-1}.B

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari SPL di bawah ini :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 – 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 – 5x_3 = 0$

Jawab : SPL yang ada, diubah terlebih dahulu menjadi perkalian dua matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Andaikan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, dan

matriks B = $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka SPL dapat diubah menjadi :

A. X = B

Atau : $X = A^{-1}.B$.

Sehingga, untuk menyelesaikan persamaan ini, terlebih dahulu harus ditentukan

A^{-1}. Setelah dihitung, maka :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Sehingga : $X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian yang didapat : $\mathbf{x_1 = 1}$**,** $\mathbf{x_2 = 2}$ **dan** $\mathbf{x_3 = 3}$**.**

6

MENYELESAIKAN SPL DENGAN n PERSAMAAN DAN n VAREABEL DENGAN MENGGUNAKAN ATURAN CRAMER

Menyelesaikan SPL dengan menggunakan Aturan Cramer, lebih mendasarkan diri pada perhitungan determinan.

Bentuk Umum SPL :

$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$

$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$

$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \ldots + a_{3n}\,x_n = b_3$

....

$a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n$

Tentukan terlebih dahulu masing masing determinannya :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta 1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{b}_{2} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{b}_{3} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b}_{n} & \mathbf{a}_{m2} & \mathbf{a}_{m3} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{b}_{3} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{b}_{n} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta 3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_{1} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{b}_{3} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{b}_{n} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ \Delta n = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{b}_{2} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{b}_{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{b}_{n} \end{vmatrix}$$

Kemudian, kita tentukan nilai dari penyelesaiannya, dengan cara :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

....

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari SPL di bawah ini :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$
$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$
$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

Jawab :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Jadi penyelesaiannya :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

7

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN MS EXCEL

Seperti diketahui bersama, Sistem Persamaan Linear merupakan salah satu penerapan matriks. Oleh karena Matriks dapat diselesaikan dengan MS Excel, maka tentu saja SPL dapat diselesaikan pula dengan MS Excel. Keuntungan dengan menggunakan MS Excel adalah pada perhitungan dengan menggunakan bilangan yang cukup sulit untuk diselesaikan secara manual, seperti bilangan desimal, bilangan pecahan.

Pada bab ini, penyelesaian dengan MS Excel akan disesuaikan dengan cara penyelesaian SPL yang telah dibahas, yaitu dengan metode Matriks dan metode Cramer.

A. Menentukan Transpose Matriks

Contoh 1 :

Selesaikan SPL di bawah ini dengan metode matriks, menggunakan MS Excel:

$9{,}375\ X_1 + 3{,}042\ X_2 - 2{,}437\ X_3 = 9{,}233$

$3{,}042\ X_1 + 6{,}183\ X_2 + 1{,}216\ X_3 = 8{,}205$

$-2{,}437\ X_1 + 1{,}216\ X_2 + 8{,}443\ X_3 = 3{,}934$

Jawab :

Seperti telah diuraikan pada bab 5.5 dari buku ini, maka untuk menyelesaikan SPL tersebut, kita harus mengubah menjadi perkalian dua matriks.

$$\begin{bmatrix} 9.375 & 3.042 & -2.437 \\ 3.042 & 6.183 & 1.216 \\ -2.437 & 1.216 & 8.443 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.233 \\ 8.205 \\ 3.934 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita andaikan setiap matriks sehingga :

$$A = \begin{bmatrix} 9.375 & 3.042 & -2.437 \\ 3.042 & 6.183 & 1.216 \\ -2.437 & 1.216 & 8.443 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

dan matriks B = $\begin{bmatrix} 9.233 \\ 8.205 \\ 3.934 \end{bmatrix}$

sehingga A.X = B

atau X = A^{-1}. B

Dengan MS Excel, maka dapat dilakukan langkah-langkah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).

3. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B13:D15), kemudian tulis formula : =**minvers(array).**
4. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range B18: B20, kemudia tulis formula; **=mmult (array1,array2)**
5. Perhatikan capture pada gambar berikut :

B18 | fx {=MMULT(B13:D15,B8:B10)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	A	9.375	3.042	-2.437					
4		3.042	6.183	1.216					
5		-2.437	1.216	8.443					
6									
7									
8	B	9.233							
9		8.205							
10		3.934							
11									
12									
13	Inv A	0.14803	-0.0836	0.05477					
14		-0.0836	0.21366	-0.0549					
15		0.05477	-0.0549	0.14216					
16									
17									
18	X = inv(A)*B	0.89628							
19		0.76522							
20		0.61444							
21									

Sehingga hasil penyelesaian dari SPL pada contoh 1 adalah :

X_1 = 0.89628

X_2 = 0.76522

X_3 = 0.61444

Langkah pengerjaan pada MS Excel dapat dipersingkat dalam satu langkah menjadi :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).
3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range B18: B20, kemudia tulis formula;
   =mmult (minvers(array),array2).
4. Perhatikan capture pada gambar berikut :

B15 | fx {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B8:B10)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	9.375	3.042	-2.437			
4		3.042	6.183	1.216			
5		-2.437	1.216	8.443			
6							
7							
8	B	9.233					
9		8.205					
10		3.934					
11							
12							
13							
14							
15	X	0.89628					
16		0.76522					
17		0.61444					
18							

Sehingga hasil penyelesaian dari SPL pada contoh 1 adalah :

X_1 = 0.89628

X_2 = 0.76522

X_3 = 0.61444

Contoh 2 :

Suatu perusahaan rumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7 %. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%?

Jawab :

Ubah dahulu soal tersebut menjadi Sistem Persamaan Linear :

Misalkan x, y, dan z secara berturut-turut adalah banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5%, 6%, dan 7%.

Ini berarti yang menjadi persamaan pertama kita adalah

$x + y + z = 2.250$ (dalam jutaan).

Persamaan kedua diperoleh dari total bunga pertahunnya, yaitu Rp 130.000.000,00:

$0,05x + 0,06y + 0,07z = 130$ (dalam jutaan).

Sedangkan persamaan ketiga dapat diperoleh dari kalimat, "banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%", sehingga persamaannya adalah $x = 2z$.

Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem seperti berikut.

$x + y + z = 2.250$

$0{,}05x + 0{,}06y + 0{,}07z = 130$

$x = 2z$ atau $x - 2z = 0$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).
3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B15: B17), kemudian tulis formula;
   =mmult (minvers(array),array2).
4. Perhatikan capture pada gambar berikut :

D18 *fx*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	A	1.00	1.00	1.00					
4		0.05	0.06	0.07					
5		1.00	0.00	-2.00					
6									
7									
8	B	2250							
9		130							
10		0							
11									
12									
13									
14									
15	X	1000							
16		750							
17		500							
18									

Sehingga hasilnya :

x = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% = Rp 1.000.000.000,-

y = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 6% = Rp 750.000.000,-

z = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 7% = Rp 500.000.000,-

Contoh 3 :

Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus. Ali harus membayar Rp 4.700.-, Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Badar harus membayar Rp 4.300,. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Carli harus membayar Rp7.100,- . Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus?

Jawab :

Misalkan bahwa:

Harga untuk sebuah buku tulis adalah x rupiah,
Harga untuk sebuah pensil adalah y rupiah dan
Harga untuk sebuah penghapus adalah z rupiah.

Dengan demikian, model matematika yang sesuai dnegan data persoalan di atas adalah sebagai berikut.

$2x + y + z = 4.700$

x + 2y + z = 4.300

3x + 2y + z = 7.100

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

dan matriks B = $\begin{bmatrix} 4700 \\ 4300 \\ 7100 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).
3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;
   =mmult (minvers(array),array2).
4. Perhatikan capture pada gambar berikut :

B12 f_x {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	A	2	1	1				
4		1	2	1				
5		3	2	1				
6								
7	B	4700						
8		4300						
9		7100						
10								
11								
12	X	1400						
13		1000						
14		900						
15								
16								

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

x = Harga untuk sebuah buku tulis = Rp 1.400,-

y = Harga untuk sebuah pensil = Rp 1.000,-

z = Harga untuk sebuah penghapus = Rp 900.-

Contoh 4 :

Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

Jawab :

Misalkan harga per kilogram jeruk x, harga per kilogram salak y, dan harga per kilogram apel z. Berdasarkan persoalan di atas, diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$x + 3y + 2z = 33.000$

$2x + y + z = 23.500$

$x + 2y + 3z = 36.500$

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, matriks $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} 33000 \\ 23500 \\ 36500 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).

3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;
   =mmult (minvers(array),array2).
4. Perhatikan *captur*e di bawah ini :

B12 | fx {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	A	1	3	2		
4		2	1	1		
5		1	2	3		
6						
7	B	33000				
8		23500				
9		36500				
10						
11						
12	X	6000				
13		4000				
14		7500				
15						

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

x = Harga untuk 1 kg jeruk = Rp 6.000,-

y = Harga untuk 1 kg salak = Rp 4.000,-

z = Harga untuk 1 kg apel = Rp 7.500,-

Contoh 5 :

Diketahui tiga bilangan a, b, dan c. Rata-rata dari ketiga bilangan itu sama dengan 16. Bilangan kedua ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lainnya. Bilangan ketiga sama dengan jumlah bilangan yang lain dikurang empat. Carilah bilangan-bilangan itu.

Jawab:

Ketiga bilangan adalah a, b, dan c. Ketentuan soal adalah sebagai berikut:

Rata-rata ketiga bilangan sama dengan 16 berarti:

$(a + b + c)/3 = 16$

Apabila kedua ruas kita kalikan 3 maka:

$a + b + c = 48$

Bilangan kedua ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lain berarti:

$b + 20 = a + c$

atau bisa kita tuliskan sebagai berikut.

$a – b + c = 20$

Bilangan ketiga sama dengan jumlah bilangan lain dikurang 4 berarti:

$c = a + b – 4$

atau bisa kita tuliskan sebagai berikut.

$a + b – c = 4$

Sehingga, SPL yang didapat adalah :

$a + b + c = 48$

a – b + c = 20

a + b – c = 4

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

dan matriks B = $\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).
3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;
   =**mmult (minvers(array),array2).**
4. Perhatikan *captur*e di bawah ini :

B12 {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	1	1	1			
4		1	-1	1			
5		1	1	-1			
6							
7	B	48					
8		20					
9		4					
10							
11							
12	X	12					
13		14					
14		22					
15							

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

a = 12

b = 14

c = 22

Contoh 6 :

2a + 3b + c + d = 12

a + b + 5c – d = 15

3a + 2b + 2c + 4d = 9

4a – b + 3c + 2d = 5

Jawab :

SPL tersebut merupakan SPL dengan 4 variabel dan 4 persamaan, jika diselesaikan dengan cara manual, tentu akan lebih sulit. MS Excel akan dengan mudah memberikan penyelesaian.

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

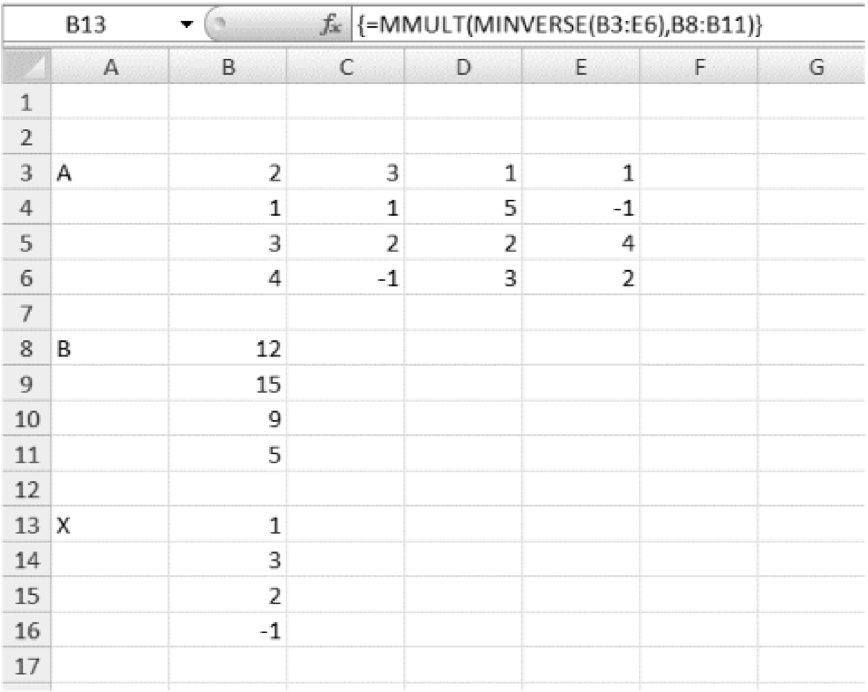
dan matriks B = $\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:E6).
2. Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B11).
3. Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B13: B16), kemudian tulis formula;

   =mmult (minvers(array),array2).

4. Perhatikan *captur*e di bawah ini :



B13 {=MMULT(MINVERSE(B3:E6),B8:B11)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	2	3	1	1		
4		1	1	5	-1		
5		3	2	2	4		
6		4	-1	3	2		
7							
8	B	12					
9		15					
10		9					
11		5					
12							
13	X	1					
14		3					
15		2					
16		-1					
17							

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

a = 1

b = 3

c = 2

d = -1

B. Penyelesaian SPL dengan Metode Cramer Menggunakan MS Excel

Contoh 1 :

Selesaikan SPL di bawah ini dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel

$x - 3y + 2z = 8$

$2x + y - 2z = 0$

$3x + 5y - z = 17$

Jawab :

Seperti telah diuraikan pada bab 5.6 dari buku ini, maka untuk menyelesaikan SPL tersebut, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).
2. Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).
3. Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).
4. Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).
5. Hasil dari nilai x = $\frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4
6. Hasil dari nilai y = $\frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.
7. Hasil dari nilai a = $\frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.
8. Perhatikan capture pada gambar berikut :

G14 =MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	1	-3	2						
4		2	1	-2		x =	4			
5		3	5	-1						
6										
7										
8	A1	8	-3	2						
9		0	1	-2		y =	2			
10		17	5	-1						
11										
12										
13	A2	1	8	2						
14		2	0	-2		z=	5			
15		3	17	-1						
16										
17										
18		1	-3	8						
19	A3	2	1	0						
20		3	5	17						
21										

Hasil yang didapat adalah :

x = 4

y = 2

z = 5

Contoh 2 :

Tentukan nilai x, y, dan z dari SPL :

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=2$$

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{5}{z}=10$$

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} - \frac{3}{z} = 17$$

Jawab :

Untuk menyelesaikan masalah di atas, agar lebih mempermudah, kita akan memisalkan :

a = $\frac{1}{x}$, b = $\frac{1}{y}$, c = $\frac{1}{z}$

Sehingga persamaan menjadi :

2a + 2b – 4c = 2

3a – 2b + 5c = 10

4a + 5b – 3c = 17

Pertama, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & -2 \\ 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 17 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 10 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).
2. Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).
3. Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).
4. Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).
5. Hasil dari nilai a = $\frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4
6. Hasil dari nilai b = $\frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.
7. Hasil dari nilai c = $\frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.
8. Perhatikan capture pada gambar berikut :

F18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	2	2	-4						
4		3	-2	5		a=	-2.16667			
5		4	5	-3						
6										
7										
8	A1	2	-3	2						
9		10	1	-2		b =	-0.33333			
10		17	5	-1						
11										
12										
13	A2	1	2	2						
14		2	10	-2		c=	0.097222			
15		3	17	-1						
16										
17										
18		1	-3	2						
19	A3	2	1	10						
20		3	5	17						

Sehingga nilai a = -2.17

b = -0.33

c = 0.097

Karena :

$a = \frac{1}{x}$, maka x = 0.46

$b = \frac{1}{y}$, maka y = 3.03

$c = \frac{1}{z}$, maka z = 10.31

Contoh 3 :

Toko serba ada "Jaya Abadi" menjual bahan bahan pokok, diantaranya kopi, mentega dan gula.

Pada bulan Januari 2006 , Ibu Siti berbelanja di toko Jaya Abadi tersebut, 4kg kopi, 2 kg mentega, 3 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 36.000,-

Pada bulan yang sama, Ibu Aminah berbelanja di toko yang sama, 2 kg kopi, 2 kg mentega, dan 4 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 39.500,-

Pada bulan Februari 2006, ketika Ibu Siti berbelanja, ternyata harga mentega mengalami kenaikan sebesar 20% dari harga pada bulan Januari 2006 , dan harga gula mengalami kenaikan sebesar 10% dari harga pada bulan Januari 2006, sehingga, untuk belanjaan dengan jumlah yang sama di bulan Januari 2006, Ibu Siti harus membayar sejumlah Rp 40.050,-

Tentukan berapa harga 1 kg kopi, 1kg gula, dan 1kg mentega di Toko Jaya Abadi pada bulan Januari 2006.

Jawab :

Misalkan : x = harga 1 kg kopi
y = harga 1 kg mentega
z = harga 1 kg gula

Pembelian ibu Siti Januari 2006 : $4x + 2y + 3z = 36.000$

Pembelian ibu Aminah Januari 2006 : $2x + 2y + 4z = 39.500$

Pembelian ibu Siti Februari 2006:

$4x + 2.(1,2)y + 3.(1,1)z = 40050$ atau

$4x + 2,4y + 3,3z = 40.050$

Sehingga SPL yang terjadi :

$$4x + 2y + 3z = 36.000$$

$$2x + 2y + 4z = 39.500$$

$$4x + 2{,}4\ y + 3{,}3\ z = 40.050$$

Pertama, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 36000 & 2 & 3 \\ 39500 & 2 & 4 \\ 40050 & 2.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 4 & 36000 & 3 \\ 2 & 39500 & 4 \\ 4 & 40050 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 36000 \\ 2 & 2 & 39500 \\ 4 & 2.4 & 40050 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).
2. Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).

3. Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).
4. Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).
5. Hasil dari nilai x = $\frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4
6. Hasil dari nilai y = $\frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.
7. Hasil dari nilai z = $\frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.
8. Perhatikan capture pada gambar berikut :

E13

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	A	4	2	3					
4		2	2	4		x=	1500		
5		4	2.4	3.3					
6									
7									
8	A1	36000	2	3					
9		39500	2	4		y =	5250		
10		40050	2.4	3.3					
11									
12									
13	A2	4	36000	3					
14		2	39500	4		z =	6500		
15		4	40050	3.3					
16									
17									
18		4	2	36000					
19	A3	2	2	39500					
20		4	2.4	40050					

r ...

Dari perhitungan MS Excel maka dapat disimpulkan :

x = harga 1 kg kopi = Rp 1.500,-

y = harga 1 kg mentega = Rp 5.250,-

z = harga 1 kg gula = Rp 6.500,-

TES FORMATIF

1. Pada semester genap tahun akademik 2015 di sebuah perguruan tinggi, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari 3 mata kuliah (Aljabar Linear, Bahasa Pemrograman, dan Sistem Operasi I) adalah 120 mahasiswa, yang terdiri dari : 10% dari mata kuliah Aljabar Linear, dan 20% dari mata kuliah Bahasa Pemrograman.

   Pada semester genap tahun akademik 2016, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari ketiga mata kuliah tersebut adalah 60 mahasiswa, yang terdiri dari : 6% dari mata kuliah Aljabar Linear dan 15% dari mata kuliah Sistem Operasi I.

   Pada semester genap tahun 2017, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari ketiga mata kuliah tersebut adalah 145 mahasiswa, yang terdiri dari : 30% dari mata kuliah Bahasa Permograman dan 20% dari mata kuliah Sistem Operasi I.

Jika dianggap jumlah peserta pada masing masing mata kuliah selalu sama pada ketiga tahun tersebut, tentukan masing masing jumlah peserta pada mata kuliah Aljabar Linear, Bahasa Pemrograman, dan Sistem Operasi I.

2. Toko serba ada " Jaya Abadi" menjual bahan bahan pokok, diantaranya kopi, mentega dan gula.

   Pada bulan Januari 2016 , Ibu Siti berbelanja di toko Jaya Abadi tersebut, 4kg kopi, 2 kg mentega, 3 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 36.000,-

   Pada bulan yang sama, Ibu Aminah berbelanja di toko yang sama, 2 kg kopi, 2 kg mentega, dan 4 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 39.500,-

   Pada bulan Februari 2016, ketika Ibu Siti berbelanja, ternyata harga mentega mengalami kenaikan sebesar 20% dari harga pada bulan Januari 2006 , dan harga gula mengalami kenaikan sebesar 10% dari harga pada bulan Januari 2006, sehingga, untuk belanjaan dengan jumlah yang sama di bulan Januari 2006, Ibu Siti harus membayar sejumlah Rp 40.050,-

   Tentukan berapa harga 1 kg kopi, 1kg gula, dan 1kg mentega di Toko Jaya Abadi pada bulan Januari 2006.

UMPAN BALIK DAN TINDAK LANJUT

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitung jumlah skor pada masing-masing soal, kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul ini :

Tingkat penguasaan =

$$\frac{Jumlah\ skor\ pada\ \ masing - masing\ soal}{Jumlah\ soal}\ x\ 100\%$$

Skor maksimal pada masing-masing soal adalah 50.

Arti tingkat penguasaan :

90 – 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan lebih dari 80%, maka ini berarti Anda sudah dapat dikategorikan menguasai modul 1, sehingga dapat melanjutkan ke modul 2. Namun jika Anda masih di bawah 80%, maka Anda harus mengulang kembali Modul 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. Ubah terlebih dahulu menjadi SPL :

   Misal : x = jumlah mahasiswa yang tidak lulus pada matakuliah Aljabar Linear

   y = jumlah mahasiswa yang tidak lulus pada matakuliah Bahasa Pemrograman

   z = jumlah mahasiswa yang tidak lulus pada matakuliah Sistem Operasi 1

   maka :

   Untuk tahun 2015 : $0{,}1\,x + 0{,}2y = 120$

   Untuk tahun 2016 : $0{,}06\,x + 0{,}15\,y = 60$

   Untuk tahun 2017 : $0{,}3\,y + 0{,}2\,z = 145$

   Setelah SPL terbentuk, selesaikan dengan perhitungan manual maupun dengan apikasi.

2. Ubah terlebih dahulu menjadi SPL :

   Misal : x = harga per kg kopi

   y = harga per kg mentega

   z = harga per kg gula

   maka :

   Januari 2016 (Ibu Siti) : $4x + 2y + 3z = 36000$

   Januari 2016 (Ibu Aminah) : $2x + 2y + 4z = 39500$

Februari 2016 (Ibu Siti) : $4x + 2.\ 1{,}2y + 3.\ 1{,}1\ z = 40050$

Setelah SPL terbentuk, selesaikan dengan perhitungan manual maupun dengan apikasi.

"**Learn** from yesterday, **Live** form today, **Hope** for tommorow

MODUL PEMBELAJARAN INOVATIF
SCIENTIFIC HYBRID LEARNING

Buku Modul Matematika Bisnis berdasar Model Scientific Hybrid Learning ini merupakan modul pembelajaran Inovatif dengan model Scientific Hybrid Learinging yang disusun dengan tujuan untuk meningkatkan kemampuan literasi dan ketrampilan berpikir kritis mahasiswa, serta meningkatkan capaian pembelajaran lulusan mahasiswa sesuai SNPT di Insitut Bisnis dan Informatika Stikom Surabaya.

Kemampuan Literasi mahasiswa ditingkatkan melalui 3 jalur, yaitu Literasi Data, Literasi Teknologi dan Literasi Sumber Daya Manusia. Selain itu mahasiswa dibekali dengan soal yang mengasah kemampuan berpikir kritis mahasiswa.

Buku Modul yang meliputi materi Matriks, Determinan dan Invers Matriks serta Sistem Persamaan Linear ini dilengkapi dengan penjelasan, serta latihan soal lengkap dengan contoh penyelesaiannya. Di samping itu, pada modul ini juga dilengkapi dengan penyelesaian dengan menggunakan Excel dan MatLab, sebagai bagian dari Literasi Teknologi.

Buku Modul Matematika Bisnis berdasar Model Scientific Hybrid Learning ini dapat digunakan sebagai acuan untuk pengembangan materi lain yang sejenis. Dengan adanya Model Scientific Hybrid Learning, diharapkan mahasiswa terpicu untuk menjadi pribadi yang memiliki kompetensi unggul dalam menghadapi Revolusi Industri 4.0

Hak Cipta Modul Pembelajaran

ORIGINALITY REPORT

3%	3%	0%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	ocw.stikom.edu Internet Source	3%

Exclude quotes	Off	Exclude matches	< 3%
Exclude bibliography	Off		